Professor Willem Baarda 1917 – 2005

Een beknopt overzicht van zijn wetenschappelijke werk

J.E. Alberda

Toen Baarda 65 jaar werd in 1982 boden zijn medewerkers hem een door hen geredigeerde feestbundel aan, getiteld *Daar heb ik veertig jaar over nagedacht* ….. Deze titel is het door H.C. van der Hoek opgetekende antwoord van Baarda aan een student die zei te twijfelen aan de juistheid van een uitspraak van de professor. De bundel bestaat uit twee delen en bevat een curriculum vitae, een lijst van bestuurlijke functies die Baarda aan de TH Delft heeft vervuld en een lijst van 56 publicaties die tussen 1947 en 1981 zijn verschenen.

De eigenlijke tekst van de bundel bevat artikelen van medewerkers, binnen- en buitenlandse collega's en oud-studenten en begint met een uitstekend artikel van H.C. van der Hoek, getiteld 'Baarda's werk'. De auteur, die in 1953 bij de onderafdeling der Geodesie in dienst was gekomen, geeft een beknopte levenbeschrijving die ongetwijfeld gebaseerd is op gesprekken met Baarda. Het artikel kan uiteraard niet inhoudelijk ingaan op het wetenschappelijke werk, maar geeft een levendige indruk van de werksfeer en de toewijding en energie waarmee Baarda elk werk aanpakte.

Het curriculum vitae vermeldt onder andere de vele bestuurlijke en organisatorische functies die Baarda heeft vervuld. Hij heeft zeer veel tijd en energie besteed aan deze taken en ook in diverse publicaties zijn visie gegeven op de functie van de geodeet in de maatschappij. Maar hoewel er daarbij altijd een verband was met wetenschap en onderwijs moeten wij ons hier beperken tot zijn eigen onderzoek en onderwijs in engere zin.

Als landmeter van het Kadaster werd Baarda in maart 1942 geplaatst bij het bureau Zwolle van de Dienst voor Buitengewoon Landmeetkundig Werk (BLW). Zijn taak bestond uit het verbeteren van de gebrekkige meetkundige grondslagen in het omringende gebied en het realiseren van de hoofdgrondslag voor de Noordoostpolder die in het voorjaar van 1942 droogviel. Voor dit gebied van 480 km^2 was een driehoeksnet voorzien. De metingen hiervoor, in het geheel met riet begroeide gebied, hadden te kampen met extreme effecten van laterale refractie.
Baarda maakte uiteraard gebruik van de in 1938 gepubliceerde *Handleiding voor de Technische Werkzaamheden van het Kadaster* (HTW), geschreven door Tienstra. Hij kon zijn bevindingen en moeilijkheden bespreken met zijn leermeester. Dit

contact werd onmogelijk, in het bijzonder door de spoorwegstaking die inging op de dag dat het geallieerde offensief gericht op Arnhem startte (17 september 1944).

In zijn wetenschappelijk vrijwel geïsoleerde positie bestudeerde Baarda de problemen van controle op meetfouten, de schaalverschillen tussen afstandmetingen en afstanden volgend uit gegeven puntcoördinaten. Een belangrijk deel van de problematiek vormden de regels van de HTW voor de aannamen betreffende de nauwkeurigheid van de coördinaten van RD-punten en voor de criteria te stellen voor nieuw te bepalen punten.
Baarda beschouwde deze periode als richtinggevend voor zijn latere onderzoek. In de woorden van Van der Hoek: "Zijn hele verdere wetenschappelijk werken is een uitwerking geweest van ideeën uit deze tijd. Een uitvoeren van een program van actie zoals hij zelf wel eens zei".

Op 1 augustus 1946 werd Baarda overgeplaatst naar de Bijhoudingsdienst van de Rijksdriehoeksmeting te Delft, die door Tienstra werd geleid. In het academisch jaar 1946 – 1947 was Tienstra rector magnificus van de TH Delft. Hij vroeg Baarda zijn colleges aan de civiel-landmetercursus over te nemen, wat deze deed naast zijn werk bij de RD. In januari 1947 werd Baarda benoemd tot lector met terugwerkende kracht tot 1 november 1946.

Zijn openbare les, getiteld 'Betekenis en waarde van coördinaten in de landmeetkunde' ging over de schrankingstheorie. De gedrukte tekst is goed te lezen maar doet een sterk beroep op het visuele voorstellingsvermogen. Visuele hulpmiddelen zoals dia's werden toen nog niet gebruikt bij zulke intree- of afscheidsredes, die werden gehouden in de eeuwenoude kapel aan de Oude Delft die als Aula dienst deed. Het is geloofwaardig dat Tienstra volgens een oud-collega van het Kadaster zei: "Heb jij er wat van gesnapt? Ik niet".

Tienstra had in een gestencild dictaat over waarnemingsrekening al inleidende hoofdstukken over de mathematische statistiek geschreven waarin het modelbegrip werd ingevoerd. Hij uitte ook scherpe kritiek op de basis van de klassieke foutentheorie waarin onder andere het begrip 'ware waarde' een rol speelde. Baarda volgde in 1947 – 1950 een Kadercursus mathematische statistiek bij het Mathematisch Centrum van de Universiteit van Amsterdam. De cursus stond onder leiding van prof. D. van Dantzig, van afkomst fysicus. Deze leerde dat het gebruik van wiskunde voor de oplossing van vraagstukken uit de ervaringswereld bestaat uit het opstellen van een wiskundig model waarin de wezenlijke elementen van het beschouwde probleem worden vertaald in wiskundige grootheden. Dan wordt het model 'ingeschakeld', dat wil zeggen met wiskundige operaties wordt afgeleid wat ten aanzien van het probleem volgt, zonder tussentijdse aanpassing van het model. Tenslotte stapt men als het ware uit het model, de 'uitschakeling', en vergelijkt de conclusies met hetgeen empirisch vastgesteld kan worden; dit neemt de vorm aan van het toetsen van hypothesen. Baarda heeft deze gedachtegang altijd vastgehouden. Als een onderzoek vastliep gaf hij de raad: "Je moet helemaal teruggaan naar het begin. Voor wiskundige moeilijkheden roep je de hulp van een wiskundige in". De cursus in Amsterdam behandelde uiteraard de moderne mathematische statistiek die voornamelijk door Britse en Amerikaanse wetenschappers werd ontwikkeld. Voorbeelden hiervan zijn het werk van Fisher en de theorie van statistische toetsen van Neyman en Pearson.

In 1948 werd de studie voor geodetisch ingenieur ingesteld. Civiel-landmeters konden deze titel behalen door het schrijven van een scriptie. Baarda, al enkele jaren lector, verkreeg de titel op 20 oktober 1950 met de scriptie *Verkenning van een Snelliuspunt*.

Tienstra overleed in 1951 op 56-jarige leeftijd. Hij had de wens geuit dat Baarda hem zou opvolgen, wat ook gebeurde: per 1 oktober 1952 werd hij benoemd tot hoogleraar in het landmeten, het waterpassen en de geodesie bij de afdeling der Weg- en Waterbouwkunde, de traditionele titel. Zijn inaugurele rede vond plaats op 14 mei 1952 en was getiteld 'Werk en werkwijze van de geodetisch ingenieur'.

Aan de TH bestonden plannen voor de vestiging van een leerstoel voor de mathematische statistiek. Baarda zal daar zeker niet tegen zijn geweest; wellicht heeft hij in de benoemingscommissie gezeten. Benoemd werd prof. Hemelrijk, voordien werkzaam bij het Mathematisch Centrum in Amsterdam. Baarda kende hem dus, bovendien was Baarda bestuurslid van de kort tevoren opgerichte Vereniging voor Statistiek.

Als intermezzo vermeld ik dat ik in 1949 begon aan de studie voor geodetisch ingenieur, en in juni 1954 afstudeerde. Bij mijn afstuderen bood Baarda mij een baan als wetenschappelijk ambtenaar aan, maar ik had al toegezegd te komen werken bij een klein particulier bureau in Noorwegen waar ik al twee keer als praktikant was geweest. In correspondentie heb ik Baarda geschreven dat ik zeer geïnteresseerd bleef in de aangeboden betrekking. Uiteindelijk trad ik op 1 september 1955 in dienst bij de 'sub-afdeling der Geodesie'.

Als eerste bezigheid herinner ik mij het corrigeren van drukproeven van het boek *Theory of the adjustment of normally distributed observations* (1956) van Tienstra. Het titelblad vermeldt: "Edited by his friends". Het boek is in hoofdzaak de vertaling van het eerder genoemde dictaat van Tienstra, met latere toevoegingen, onder andere diens fulminatie tegen de 'ware waarde'. De vertaling is gemaakt door experts van het ITC.

In dezelfde periode moesten drukproeven van de HTW 1956 worden gecorrigeerd. Baarda had in 1951 Tienstra opgevolgd als voorzitter van de commissie die de nieuwe versie van de HTW moest samenstellen. De andere leden waren D. de Groot en F. Harkink, beiden ervaren experts van het Kadaster. Op grond van Baarda's ervaringen bij de BLW werd voor de coördinaten van RD-punten in een

gebied een cirkelvormige standaardellips aangenomen, waarvan de straal afhankelijk was van hun gemiddelde onderlinge afstand, zonder correlatie van punt tot punt. Voor nieuw te bepalen punten werd als eis gesteld dat hun vooraf berekende standaardellips moest liggen binnen een cirkel met een straal die afhing van de afstand tot het meest nabije andere onafhankelijke punt van de grondslag. Net zoals bij de HTW 1938 waren voor de toepassingen nomogrammen gemaakt die veel rekenwerk bespaarden. Matrices werden ingevoerd evenals rekenschema's voor hun inversie. In de voorgaande jaren waren de regels van de handleiding al praktisch gebruikt door studenten in hun zomerkampen.
Wat de landmeetkundige meettechniek betreft bleef eigenlijk alles bij het oude: RD-punten, Snelliuspunten, veelhoeken en meetlijnen. Elektronische afstandmeting was nog een veelbelovende verwachting.

Waren de ontwerpregels van de HTW 1956 al vernieuwend, een nog veel ingrijpender vernieuwing was de invoering van moderne statistische methoden. De kadastrale experts van de commissie waren er oorspronkelijk op tegen maar Baarda wist hen over te halen. Niet het hele arsenaal van de mathematische statistiek werd aangesproken. De behandeling werd beperkt tot bekende zaken van de normale verdeling en verder de veelzijdig bruikbare F-toetsen, waarvoor tabellen en nomogrammen werden gemaakt. Het was waarschijnlijk een wereldprimeur voor een ambtelijke handleiding van deze aard. In de volgende jaren zag men steeds meer de mathematische statistiek doordringen in de internationale geodetische vakliteratuur.
Voor zijn werk aan de HTW 1956 werd Baarda Koninklijk onderscheiden door zijn benoeming tot Officier in de Orde van Oranje Nassau. De andere commissieleden kregen een gratificatie van f 1000,-.

Tijdens het werken aan de HTW had Baarda al plannen voor de oprichting van een rekencentrum. De elektronische computer was in opkomst. Hij had goede contacten met zijn collega van de afdeling der Wiskunde, Timman, en deelde diens mening dat de grote rekencapaciteit van de computers pas tot zijn recht zou komen als aan de berekeningen een grondig doordachte theoretische opzet ten grondslag lag. Timman richtte in 1956 het Instituut voor toegepaste wiskunde op, later genaamd het Rekencentrum van de TH. Wat Baarda voor ogen stond was een groep die zowel theoretisch onderzoek deed als expertise betreffende moderne rekenmethoden ontwikkelde. Jonge ingenieurs, ook uit het buitenland, zouden bij de groep gedetacheerd kunnen worden om kennis te maken met dit werk. Hij kreeg steun van de toenmalige president-curator dr. Van der Leeuw. Mij is niet bekend wanneer precies het Laboratorium voor Geodetische Rekentechniek (LGR) officieel is opgericht (Van der Hoek noemt 1958) maar de facto bestond het LGR al eerder. Wel was ik aanwezig bij een bezoek dat Baarda bracht aan de (waarnemend) secretaris van de Hogeschool, waarbij de naam werd vastgesteld. Het personeel bestond uit ir. B.G.K. Krijger, ir. F. Meerdink en mij.

Toen in 1956 ruimte in het geodesiegebouw vrijkwam doordat de Meetkundige Dienst (MD) van de Rijkswaterstaat en het ITC naar hun nieuwe gebouwen verhuisden, kreeg het LGR een voormalige tekenzaal van de MD op de tweede verdieping als werkruimte. Vooraf was een geschikte kamerindeling gemaakt.
Wij fungeerden ten dele als instructeurs in het onderwijs om aan tweedejaars studenten de colleges in de waarnemingsrekening uit te leggen; ikzelf ging ook als instructeur mee naar de zomerkampen. Daarbij kwam ook het begeleiden van afstudeerders, waaronder civiel-landmeters die de ingenieurstitel wilden behalen. Terzijde vermeld ik dat ik veel secretarieel- en vertaalwerk deed voor Baarda in zijn functie van secretaris-generaal van de FIG (1955-1959). Meestal overlegden we op zaterdagochtenden. Het FIG-congres in 1958 vergde veel voorbereiding.

Een van de doelstellingen van het LGR was het deelnemen aan internationale projecten. Het eerste project was de verfeffening van het Europese waterpasnet, dat in voorbereiding was sinds circa 1955. Het net bestond uit geselecteerde waterpastrajecten in heel West-Europa, van Spanje en Italië tot en met Finland; het was een IAG-project. De voortreffelijke centrale organisatie, gevestigd bij het Deense geodetische instituut, verzamelde gegevens: gemeten hoogteverschillen omgezet in geopentiaalverschillen, gewichtsformules, overzichtskaarten enz.. Het rekenwerk werd gedaan bij het IGN in Parijs, de TH München en het LGR, ieder met een eigen aanpak. Als nulpeil werd het NAP gekozen, als oudste nationaal peil van Europa. Het was een fraaie gelegenheid om Delftse ideeën toe te passen: vereffening in fasen volgens Tienstra en statistische toetsingen volgens Baarda.

In januari 1959 was er in Delft een bijeenkomst van de rekencentra waarbij de uitkomsten werden vergeleken. Onze hoogten verschilden hoogstens 0,1 mm van die uit München, het IGN had op één punt 1 mm verschil. Wij waren de enigen die een elektronische rekenautomaat hadden gebruikt, namelijk de ZEBRA, van TNO, ontworpen en gebouwd op het Laboratorium van de PTT in Rijswijk. De hele covariantiematrix van de hoogten was berekend.

Met dit project stond het LGR internationaal op kaart; een overzicht werd gepubliceerd in Bulletin Géodésique in 1960 en het eindrapport verscheen in 1963 in de Publications on Geodesy van de Rijkscommissie voor Geodesie (New Series, Vol. 1, No 2). Voor de Nederlandse vakwereld werd het LGR gepresenteerd op de Hogeschooldag in 1960, met een inleiding door Baarda en berichten over onderzoek van Krijger, Meerdink en mij. Het Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde van 1960 bevat de teksten (Jrg. 76, No. 2).

Toen de TH een eigen centrale computer kreeg werd de staf van het LGR uitgebreid met een assistent-programmeur en twee typistes die ponsbanden voor de invoer vervaardigden en rapporten typten. In 1964 werd de wetenschappelijke staf versterkt door de komst van ir. J. de Kruif, die hoofdzakelijk als programmeur werkte. Het LGR gaf een eigen serie gestencilde rapporten uit over deelonderzoeken, maar ook als handleidingen voor het gebruik van de gemaakte programma's. Er werd onder andere deelgenomen aan de vereffening van de Europese triangulatie en aan de theoretische voorbereiding van een groot veelhoeksnet dat zou dienen als geodetische grondslag voor Saoedi-Arabië. De KLM en Grontmij zouden een deel daarvan meten; het ITC fungeerde als intermediair. Voor de afstandmeting werden tellurometers gebruikt.

Over de toepassing van de tellurometer en de elektro-optische geodimeter werd door verschillende buitenlandse auteurs gerapporteerd op het congres van de FIG te Delft in 1958. Voor de dagelijkse praktijk van de landmeetkunde was belangrijker dat er kleine en handige elektro-optische afstandmeters op de markt kwamen (circa 1968).

Samen met de mogelijkheden die de computer bood, maakten deze dat de opzet van de HTW1956 voor omvangrijke grondslagen, bijvoorbeeld ten behoeve van ruilverkavelingen, in enkele jaren geheel verouderd was. Dat vond zijn oorsprong bij zomerkampen in Zuid-Limburg. Vanouds leerden de derdejaars studenten het ontwerpen van grondslagen volgens de HTW1956 al jaren voor de handleiding verscheen. Een van de praktische beginselen van Baarda was dat de hoofdveelhoeken in de 'voorkeursrichting' van het terrein moesten lopen. Een landmeter van het Kadaster zei ons eens dat de grondslagen die Baarda in de jaren 1940 bij Zwolle had gelegd zo helder en systematisch ontworpen waren in vergelijking met wat eerder in gebruik was.

Maar het landschap rond Wijlre of Gronsveld is niet hetzelfde als dat rond Zwolle: met de beste wil van de wereld was er in het heuvelland geen voorkeursrichting aan te geven. Door de nieuwe afstandmeters was het mogelijk en zinvol een netwerk van gesloten veelhoeken te ontwerpen en dat met richtingen en, waar doenlijk afstanden, te verbinden met RD-punten in of rondom het gebied. Baarda, die altijd meeging naar de zomerkampen, had de theorie voor de opzet van de veelhoeksberekeningen met complexe getallen al klaar! Naderhand werd zo'n kringnet door het Kadaster gemeten en in Delft vereffend, uiteraard in fasen: eerst het net op zichzelf, daarna de aansluiting aan de RD-punten. Eens deed zich een geval voor dat de statistische toetsing van de eerste fase tot aanvaarding leidde, terwijl de tweede fase in totale verwerping resulteerde. Het bleek dat geleverde afstanden niet waren gecorrigeerd voor de stereografische kaartprojectie; de correctie kan oplopen tot circa 1 cm per 100 m. Een kringnet kon een diameter van zo'n 10 km hebben. Tot de komst en brede toepassing van plaatsbepaling met satellieten is een groot deel van Nederland voorzien van meetkundige grondslagen in de vorm van kringnetten.

Het is niet mogelijk om in chronologische volgorde de diverse onderwerpen van Baarda's onderzoek te beschrijven. De eenvoudige reden is dat verschillende onderwerpen jarenlang zijn aandacht hebben gekregen, vaak in onderlinge samenhang. Dit blijkt ook duidelijk uit het eerste hoofdstuk van *S-Transformations and criterion matrices* (1973, tweede herziene uitgave 1981). De titel is 'An outline of the ideas and their origin'; het hoofdstuk bevat de zin: "Looking back over the twenty-five years needed to establish the theory, one is surprised at the long and winding path that had to be followed (...)".

Het is duidelijk dat Baarda een 'plan van actie' volgde dat wortelde in zijn ervaringen als landmeter in de jaren 1942 – 1946. Zijn vooralsnog intuïtieve ideeën gingen onder meer in de richting van het belang van lengteverhoudingen in plaats van absolute lengten en naar het op lokaal niveau karakteriseren van de nauwkeurigheid van bijvoorbeeld de coördinaten van RD-punten. Hieruit kwam de theorie van de schrankingstranformaties voort. Het woord schranking is gekozen naar analogie van een geschrankte deur en staat voor de vervorming van bijvoorbeeld een vereffend driehoeksnet door de toevallige afwijkingen in de waarnemingen.

Schrankingstransformatie

Men verkrijgt een zogenaamd schrankingsstelsel door één zijde $A_1 A_2$ als 'foutloze' rekenbasis aan te nemen, dat wil zeggen de coördinaten van de eindpunten A_1 en A_2 hebben de variantie nul. Voor het hele netwerk kan de covariantiematrix van alle coördinaatgrootheden worden berekend en daaruit volgen standaardellipsen voor alle punten evenals relatieve standaardellipsen voor coördinaatverschillen. Een fraai voorbeeld geeft de kaart van het primaire net van de RD die werd gepubliceerd in het rapport *Geodetic work in the Netherlands 1967-1970*, ingediend op het congres van de IAG in Moskou, 1971. De rekenbasis is de zijde Amersfoort – Apeldoorn. De standaardellipsen worden groter naarmate de punten verder van de rekenbasis af liggen, met versnelde groei aan de randen van het net.

In zijn openbare les van 1947 gebruikte Baarda in principe het beeld van een 'duizend maal' herhaald gedachte meting en berekening van het net, met steeds dezelfde rekenbasis $A_1 A_2$. Op de kaart zouden deze voor elk punt een 'puntenwolk' opleveren. Wil men nu de situatie in een gebied in Groningen bekijken dan kiest men daar twee basispunten, zeg B_1 en B_2. Elk van de duizend gedachte netten wordt nu door een gelijkvormigheidtransformatie aangesloten op de werkelijk gemeten coördinaten van B_1 en B_2. De puntenwolken die hoorden bij de rekenbasis $A_1 A_2$ veranderen in puntenwolken behorend bij de rekenbasis $B_1 B_2$; de punten A_1 en A_2 krijgen ook een puntenwolk.

In feite wordt de hele covariantiematrix van de coördinaten getransformeerd door de overgang van de basis $A_1 A_2$ naar de basis $B_1 B_2$: dit is een schrankingstransformatie (in het Engels vertaald met 'similarity covariance transformation' ofwel 'S-transformation'). De coördinaten veranderen hierbij niet. Omdat een 'puntenwolk' niets anders is dan een heuristische aanduiding van een tweedimensionele normale verdeling, kunnen de 'duizend gelijkvormigheidaansluitingen' die leidden tot de invoering van de basis $B_1 B_2$ gezien worden als een aansluiting met stochastische parameters. Toen ik dat aan Baarda vertelde vond hij het een goed idee; hij is er ongetwijfeld 's avonds mee aan de slag gegaan want hij zei de volgende dag: "Je schrijft het zó op!"

Het idee van de schrankingstransformatie kan ook uitgevoerd worden door een schrankingsstelsel overbepaald gelijkvormig aan te sluiten op meer dan twee punten, zelfs op alle punten van het net. Omstreeks 1955 heeft Baarda dat toegepast. Ik herinner me dat Krijger, die de berekeningen had uitgevoerd, ellipsen zat te knippen uit vellen gekleurd dun karton om een fraaie kaart van de resultaten te maken. Bij deze aanpak zijn er geen coördinaten met nulvariantie; de ellipsen variëren weinig in grootte en benaderen de cirkelvorm beter dan bij de aansluiting op twee punten. De coördinaten zullen hierbij wel veranderen.
Het kernpunt bij schrankingstransformaties is dat de waarschijnlijkheidsverdeling van hoeken en lengteverhoudingen niet wordt veranderd. Het fraaie gelijkmatige beeld dat de kaart van Krijger vertoonde betekent dus niet dat de nauwkeurigheid van het net wordt verbeterd door de geschetste aanpak. Maar dit onderzoek was gericht op een ander doel: het vinden van een criteriummatrix.

Criteriummatrices

Al tijdens het werk aan de HTW 1956 zocht Baarda naar een betere weergave van de eisen te stellen aan de precisie van nieuw te bepalen coördinaten in de vorm van een kunstmatige covariantiematrix, als wiskundige vertaling van de ondergrens van de voor het doel vereiste precisie. Onderzoek naar de structuur van de covariantiematrices van coördinaten in werkelijk gemeten netwerken zou een antwoord moeten geven op de vraag hoe zo'n criteriummatrix moest worden geconstrueerd. In de cursus 1956 – 1957 bezochten Van der Hoek en ik het college 'Theorie der matrices' van prof. Meulenbeld. Mijn met de hand geschreven dictaat heb ik nog, maar gelukkig ook het keurig uitgewerkte en getypte dictaat dat Van der Hoek ervan maakte; het is in de publicaties van het LGR opgenomen als rapport R 20. Het was een uitstekend college en het bevatte een hoofdstuk structuur van de matrix, misschien op verzoek van Baarda. Maar om dat hoofdstuk te karakteriseren: het ging veelal over willekeurige vierkante matrices, over de vergelijking van Cayley–Hamilton, elementaire delers, de normaalvorm van Smith en die van Jordan enz.. Wiskundig gezien erg interessant en helder behandeld maar er viel geen touw aan vast te knopen dat naar een criteriummatrix leidde.

Nu had Krijger uit het primaire RD-net een aantal deelnetten gekozen en door schrankingstransformaties elk deelnet tot een schrankingsstelsel gemaakt. De bijbehorende covariantiematrices met, zeg n x n elementen waren beschikbaar.
Het idee kwam toen op, niet de hele matrix te bekijken maar telkens één rij, dus $\overline{x_i,x_j}$ en $\overline{x_i,y_j}$ met bijvoorbeeld $i = 1$ en $j = 1, \ldots, n$ bij een matrix betreffende n punten behalve de basispunten. Schrijf je die covarianties op een kaart bij elk punt P_j dan kun je 'hoogtelijnen' van gelijke covariantie tekenen. Daaruit bleek een merkwaardige bijna-regelmaat. Als P_i en P_j aan dezelfde kant van de rekenbasis

lagen waren $\overline{x_i, x_i}$ en $\overline{y_i, y_i}$ positief, anders negatief. $\overline{x_i, y_j}$ was positief rechts van de lijn van P_i naar ongeveer het midden van de rekenbasis; links daarvan negatief. Voor $\overline{y_i, x_j}$ gold het tegengestelde. De stijging of daling verliep redelijk regelmatig en het verschijnsel deed zich voor zowel bij een triangulatie als bij een groot veelhoeksnet. Er zat duidelijk 'structuur' in maar Baarda zag niets in deze aanpak.

Als ontwikkeling van Baarda's ideeën in de HTW 1956 kon echter een 'modelmatrix' ontworpen worden met gelijke cirkelvormige standaardellipsen voor alle punten en cirkelvormige relatieve standaardellipsen met een straal afhankelijk van de afstand tussen de betrokken punten. De verkregen modelmatrix kreeg vorm met $\overline{x_i, x_i} = \overline{y_i, y_i} = d^2$ en $\overline{x_i, x_j} = d^2 - c^2 l_{ij}$, met een constante c^2 en de afstand l_{ij}. Voor consistentie bleek $\overline{x_i, y_j} = \overline{y_i, x_j} = 0$ voor alle i en j te moeten zijn. Na invoering van een rekenbasis en een schrankingstransformatie ontstond een matrix waarin d^2 helemaal niet meer voorkwam. De lijnen van gelijke covariantie hadden een vloeiend verloop en vertoonden dezelfde structurele eigenschappen die empirisch waren gevonden in de netwerken van Krijger. Het getypte rapport van dit onderzoek, getiteld *Een vervangingsmatrix*, was klaar in november 1963.

Baarda was omstreeks 1962 ook intensief aan het werk gegaan met de constructie van een criteriummatrix, uitgaande van een schrankingsstelsel met een rekenbasis $P_r P_s$ en een willekeurig netwerkpunt P_i, dat uiteraard een cirkelvormige standaardellips moest hebben. Uit die eis volgde dat bij de bepaling van de straal van de cirkel een symmetrische functie van de elementen van de driehoek $P_r P_s P_i$ een rol speelde, maar welke functie dat was bleef onbekend. Uit mijn formules was zonder veel moeite zo'n functie af te leiden, die wegens de betrekkingen in een driehoek in verschillende vormen kan worden geschreven. Voor de introductie van relatieve standaardellipsen moest naast P_i een tweede netwerkpunt P_j worden ingevoerd. Over deze en andere kwesties hebben Baarda en ik tussen 1963 en 1969 een uitvoerige notawisseling en gespekken gevoerd.

Toen ik in 1970 lector werd stelde Baarda voor dat ik het werk aan de criteriummatrix aan hem zou overlaten, wat ik met genoegen deed. Hij heeft daarna nog erg veel werk gedaan aan onder andere het bewijs van de positief-definietheid en aan de toepassing van de criteriummatrix en veel voorbeelden laten doorrekenen. Toen hij uiteindelijk de Nederlandse tekst van *Schrankingstransformaties en criteriummatrices* had geschreven noemde hij in een opmerking mijn benadering met de modelmatrix 'mystiek'. Toen heb ik in de marge geschreven: "Ik stel voor dit weg te laten"; ik heb de passage niet vertaald. Overigens heeft hij ook in de definitieve Engelse versie mijn medewerking duidelijk en met waardering genoemd. Die versie werd in 1973 uitgegeven in 'Publications on Geodesy' van de Rijkscommissie voor Geodesie (Vol. 5 No. 1), en gepresenteerd op het Symposium over geodetische berekeningen in Oxford (1973). De publicatie is zeer bekend geworden en werd zo veel gevraagd dat in 1981 een nieuwe (herziene) uitgave nodig was.
Op hetzelfde symposium heb ik een rapport gepresenteerd getiteld *Planning and optimization of networks* waarin onder andere de hoofdzaken van mijn 'vervan-

gingsmatrix' zijn vermeld. De redactie van het Italiaanse tijdschrift 'Bollettino di Geodesia e Scienze Affini' verzocht het te mogen publiceren, wat is gebeurd (Jrg. 33, No. 2, 1974). Baarda heeft in Delft extra overdrukken laten maken voor de studenten. In het eerste hoofdstuk van *S-Transformations and criterion matrices* in de uitgave van 1981 staat evenals in de uitgave van 1973 dat in 1969 onze discussies "led... to the insight that the two theories must be identical in essence". Helaas is ook blijven staan: "A separate publication by Alberda is to be expected".

Complexe getallen en quaternionen

Omstreeks 1962 begon Baarda aan de opzet van de puntsbepaling in het platte vlak met complexe getallen. In het eerder genoemde hoofdstuk van *S-Transformations and criterion matrices* noemt hij het gebruik van complexe getallen en lengteverhoudingen door Tienstra in een publicatie uit 1933 over driehoeksnetten met cirkelvormige standaardellipsen. De drijfveer van Baarda's opzet was zijn allang bestaande behoefte om van absolute lengten en schaalverschillen af te komen en met dimensieloze vormelementen, in casu hoeken en lengteverhoudingen, te werken. Omdat alle bewerkingen met complexe getallen gedefinieerd kunnen worden zoals die met reële getallen, kan de theorie van de puntsbepaling ermee opgebouwd worden (zoals overigens de hele functietheorie). De afbeelding van een complex getal in een tweedimensioneel x, y-assenstelsel is bekend. In verband met het Nederlandse landmeetkundige gebruik om het argument (de kaarthoek) te rekenen vanaf de positieve y-as was het nodig deze as als reële as te nemen en de x-as als imaginaire as, zodat een punt P_i werd aangeduid met de complexe coördinaat $z_i = y_i + ix_i$. Coördinaatverschillen worden aangeduid als $z_{ij} = z_j - z_i$, $z_{ik} = z_k - z_i$; afstanden als l_{ij} en argumenten als φ_{ij}.
Volgens de formule van Euler is algemeen: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
dus $l_{ij}e^{i\varphi_{ij}} = e_{ij}(\cos\varphi_{ij} + i\sin\varphi_{ij})$ met de natuurlijke logaritme ln:

$$\ln l_{ij} + i\varphi_{ij} = \ln(y_{ij} + ix_{ij}) \tag{1}$$

evenzo geldt:

$$\ln l_{ik} + i\varphi_{ik} = \ln(y_{ik} + ix_{ik}) \tag{2}$$

Trek (1) van (2) af: $(\ln l_{ik} - \ln l_{ij}) + i(\varphi_{ik} - \varphi_{ij}) = \ln z_{ik} - \ln z_{ij}$

Noemt men de hoek $P_jP_iP_k : \alpha_{jik}$ en de lengteverhouding $\dfrac{l_{ik}}{l_{ij}} : v_{ijk}$, dan is dus

$$\ln v_{jik} + i\alpha_{jik} = \ln\frac{z_{ik}}{z_{ij}}$$

Links staan grootheden die kunnen worden gemeten, rechts een functie van coördinaten. Baarda noemde beide leden pi-grootheid, en gebruikte daarvoor de notatie Π_{jik}. v_{jik} wordt uitgedrukt in eenheden van de natuurlijke logaritme (nepers); in radialen; beide zijn uiteraard dimensieloos.

Tussen 1964 en 1969 heeft Baarda een collegedictaat in vier delen geschreven waarin hij alle voorkomende puntsbepalingsmethoden met complexe getallen behandelde. Van belang is dat Tienstra's symbolische vermenigvuldiging ter bepaling van varianties en covarianties gewoon kan worden toegepast op complexe getallen.
Zo is $\overline{z,z} = \overline{(y+ix),(y+ix)} = \overline{y,y} + \overline{2ix,y} - \overline{x,x}$. Voor cirkelvormige standaardellipsen vindt men $\overline{z,z} = 0$.
In de genoemde periode werden door medewerkers systematisch rekenprogramma's ontwikkeld, die bij de komst van de eerder beschreven kringnetten konden worden toegepast.

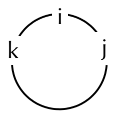
Omstreeks 1962 was er internationaal een streven om de klassieke geodetische berekeningen op de ellipsoïde te vervangen door de meting van ruimtelijke netwerken en dus driedimensionele berekeningen. Binnen circa 10 jaar is deze aanpak gesneuveld door de onmogelijkheid verticale hoeken nauwkeurig te meten en de opkomst van de satellietgeodesie. Baarda was al bij het begin van zijn systematische ontwikkeling van de puntsbepaling in het platte vlak bezig met een generalisatie daarvan tot de driedimensionele ruimte. De algebra die hij daarvoor zocht moest in ieder geval deling van getallen toelaten wegens de gewenste dimensieloosheid. Hij kon daarom geen driedimensionele vectorruimte gebruiken omdat voor vectoren geen deling is gedefinieerd. Wat hij wel kon gebruiken waren de hypercomplexe getallen met de naam quaternionen en met de vorm:

$$q = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k$$

waarin a_1 .... a_4 reële getallen zijn, en i, j en k eenheidsvectoren met de eigenschappen

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad \text{en} \quad ij = k = -ji \; ; \; jk = i = -kj \; ; \; ki = j = -ik \; .$$

De uitvinder van de quaternionen is de Engels-Ierse wiskundige en astronoom W.R. Hamilton (1805 –1865). In de literatuur is zijn uitspraak te vinden dat de eigenschappen van i, j en k hem op een bepaalde dag invielen toen hij over een brug in Edinburgh liep.
Vermenigvuldiging van twee quaternionen geschiedt door de termen successievelijk met elkaar te vermenigvuldigen onder inachtneming van de eigenschappen van i, j en k waarbij men beslist een tabel of schema nodig heeft, bijvoorbeeld als hieronder: is de volgorde rechtsom



$ij = k \qquad ik = -j$

dan is het teken positief, linksom negatief. Belangrijk is dat vermenigvuldiging niet commutatief is zoals aan de regels voor i, j en k te zien is.

De gecompliceerdheid was reden voor onder andere de Amerikaanse wiskundige, fysicus en chemicus J.W. Gibbs (1839-1903) om de vectoranalyse te funderen. Het product van twee quaternionen bestaat uit een aantal termen. De termen afkomstig

van de vectordelen vormen samen het scalaire product en het vectorproduct uit de vectorrekening.
In 1956 en 1957 heb ik twee afstudeerders begeleid die onderzoek deden betreffende quaternionen. Baarda heeft later in studies over ruimtelijke geodesie, ook in verband met fysische geodesie, veel gebruik gemaakt van quaternionen.

Toetsing in geodetische netwerken

In het eerste hoofdstuk van zijn publicatie *A testing procedure for use in geodetic networks* (NCG publicaties Vol. 2 No. 5, 1968) vermeldt Baarda dat, na criterium-matrices, het tweede aandachtspunt voor Special Study Group 1.14 van de IAG was: "The use of statistical tests in connection with the adjustment of networks ....". In 1965 nam Baarda het voorzitterschap van SSG 1.14 over van de Zweedse prof. L. Asplund.

In verband met de vereffening van geodetische netwerken is de toetsen hypothese H_0 dat de verwachtingen van de (normaal verdeelde) waarnemingsgrootheden voldoen aan de voorwaardevergelijkingen van het vereffeningsprobleem. Overigens hoeft het vereffeningsprobleem niet in voorwaardevergelijkingen geformuleerd te zijn. De alternatieve hypothese is dat er modelfouten zijn (systematische afwijkingen of grove fouten in waarnemingen). Baarda baseerde zijn opzet op de verdeling van Fisher-Snedecor met als toetsgrootheid:

$$\underline{F}_{b,\infty} = \frac{\underline{\hat{\sigma}}^2}{\sigma^2}$$

waarin $\underline{\hat{\sigma}}^2$ de schatter van de variantiefactor is die uit de vereffening volgt, b het aantal overtallige waarnemingen en σ^2 de bekend onderstelde variantiefactor. Indien σ^2 niet bekend is kan de grootheid:

$$\underline{F}_{b,k} = \frac{\underline{\hat{\sigma}}^2}{\underline{\hat{\sigma}}_k^2}$$

worden gebruikt, waarbij de noemer een onafhankelijk verkregen schatter uit k vrijheidsgraden is.

Uitgegaan wordt van een vereffening met correctievergelijkingen, het zogenaamde tweede standaardvraagstuk, met n onbekenden Y en m waarnemingen x zodat $m - n = b$. De correctievergelijkingen zijn dan, met correcties $\underline{v}$:

$$A\underline{Y} = \underline{x} + \underline{v}$$

De kleinste-kwadraten oplossing is, met de gewichtsmatrix P:

$$\underline{Y} = (A^T PA)^{-1} A^T P_{\underline{x}}$$

De correcties vindt men uit $\underline{v} = A\underline{Y} - \underline{x}$

De schatter voor de variantiefactor σ^2 is:

$$\underline{\hat{\sigma}}^2 = \frac{\underline{v}^T P \underline{v}}{b}$$

Onder H_0 heeft $\frac{\underline{\hat{\sigma}}^2}{\sigma^2}$ de verdeling van Fisher-Snedecor $\underline{F}_{b,\infty}$ met de verwachting 1.

Is nu de waarnemingsvector behept met de vector van modelfouten ∇x dan krijgt men verstoorde uitkomsten voor $\underline{y}$, zeg $\underline{y}' = \underline{y} + \nabla y$ en voor de correcties, $\underline{v}' = \underline{v} + \nabla v$. Gebruik makend van het feit dat $E\{\underline{v}\} = 0$ is het niet moeilijk af te leiden dat men eveneens een verstoorde schatter van de variantiefactor krijgt, zeg $\underline{s}^2$ met

$$E\left\{\frac{\underline{s}^2}{\sigma^2}\right\} = E\left\{\frac{\underline{\hat{\sigma}}^2}{\sigma^2}\right\} + \frac{\nabla v^T P \nabla v}{b\sigma^2}$$

of met
$$E\left\{\frac{\underline{s}^2}{\sigma^2}\right\} = 1 + \frac{\lambda}{b}$$

De grootheid $\frac{\underline{s}^2}{\sigma^2}$ heeft de niet-centrale F-verdeling:

$$\frac{\underline{s}^2}{\sigma^2} \sim \underline{F}'_{b,\infty,\lambda}$$

Met behulp van een tabel of nomogram van deze verdeling kan men bepalen hoe groot λ moet zijn om, in een toets met onbetrouwbaarheid α, met een hoge waarschijnlijkheid β_0 (bijvoorbeeld $\beta_0 = 80\%$) de kritische waarde $F_{1-\alpha,b,\infty}$ te overschrijden. Noemt men deze waarde λ_0 dan is dus:

$$P\left\{\underline{F}'_{b,\infty,\lambda_0} > F_{1-\alpha,b,\infty}\right\} = \beta_0$$

Zonder nadere aannamen kan men door $\lambda = \lambda_0$ te stellen geen grenswaarde voor een individuele ∇_i berekenen. Indien de verstoringen een bekend of hypothetisch patroon volgen, kan men berekenen hoe sterk het verschijnsel moet werken opdat het in de toets tot verwerping leidt met kans β_0. Omgekeerd: als men kan schatten hoe groot het verstorend effect op de waarnemingen is, kan men nagaan of het net sterk genoeg is om het met grote waarschijnlijkheid te kunnen constateren.

De toetsmethode kan verder worden ontwikkeld voor het geval dat één waarneming $\underline{x}_i$ behept is met een fout ∇x_i. Dit wordt een conventionele alternatieve hypothese genoemd. In het geval dat de gewichtsmatrix een diagonaalmatrix is, blijkt dat de normaal verdeelde grootheid:

$$\underline{w}_i \overset{def}{=} \frac{-\underline{v}_i}{\sigma_{v_i}}$$

als toetsgrootheid fungeert: de kleinste-kwadraten-correctie gedeeld door zijn eigen standaardafwijking. Deze eenvoudige interpretatie werd door ir. De Kruif opgemerkt aan de hand van numerieke uitkomsten van berekeningen met de algemene formules van Baarda, waaruit de relatie zonder veel moeite is af te leiden. Voor iemand uit de Delftse school is de verdeling van correctiegrootheden sinds Tienstra geen nieuws, maar voor sommigen in de internationale geodetische gemeenschap was het een nieuwtje. Jaren geleden had een buitenlandse collega de grootte van correcties vergeleken met de respectieve standaardafwijkingen van de waarnemingsgrootheden. Toen ik hem in de discussie wees op de onjuistheid noemde hij het "eine Annäherung", wat het niet is. De eendimensionele w-toets wordt gebruikt om de waarnemingen stuk voor stuk te toetsen, het zogenaamde 'data snooping'.

Uit het voorgaande moge duidelijk zijn dat Baarda voor alle toetsen die in een netwerk worden toegepast een vast onderscheidingsvermogen β_0 (bijvoorbeeld 80%) verlangde voor alle alternatieve hypothesen met dezelfde $\lambda = \lambda_0$ (om zo het begrip 'betrouwbaarheid' van een net te kwantificeren). De onbetrouwbaarheid α is tot nu toe niet besproken; het is duidelijk dat dezelfde α niet kan worden toegepast als β_0 wordt vastgesteld voor alle toetsen van verschillende dimensies. Een kleine onbetrouwbaarheid α_0 wordt gekozen voor een eendimensionele toets, bijvoorbeeld $\alpha_0 = 0{,}001$. De waarde van λ_0 volgt uit de relatie:

$$\lambda_0 = \lambda(\alpha_0, \beta_0, 1, \infty)$$

Eist men hetzelfde onderscheidingsvermogen voor een toets met b vrijheidsgraden, dan is:

$$\beta_0 = \beta(\alpha, \lambda_0, b, \infty)$$

Uit deze vergelijking kan α worden opgelost, waarna de kritieke waarde $F_{1-\alpha, b, \infty}$ kan worden bepaald die wordt gebruikt in toetsen met b vrijheidsgraden.

De achtergrond van Baarda's opzet om α variabel te kiezen is dat een vaste α van bijvoorbeeld 5% die voor een individuele waarneming tot verwerping leidt, in principe tot verwerping van de hele vector der waarnemingen zou moeten leiden (hoewel men niet de conclusie zou trekken dat het hele net moet worden over gemeten!). Dit betekent dat het kritieke gebied voor de hele waarnemingsvector veel groter zou zijn dan 5%.

Met de geschetste methode kan men voor elke waarnemingsgrootheid $\underline{x}_i$ een unieke grenswaarde $\nabla_{0,i}$ berekenen die met kans β_0 leidt tot verwerping in een eendimensionele toets met onbetrouwbaarheid α_0, maar ook in een b-dimensionele toets met bijbehorende α. In de praktijk vindt men voor $\nabla_{0,i}$ waarden van 6 à 8 maal de standaardafwijking. De maat is conventioneel, men kan alleen verlangen dat hij ongeveer dezelfde grootte heeft voor het gehele net. Bij 'uitschieters' is de betrokken waarneming te slecht gecontroleerd, zodat lokaal het net verbeterd moet worden.

Omdat α toeneemt met b en een onrealistisch hoge waarde aanneemt als $b > 20$ worden toetsen met variabele α beperkt tot netwerken met ten hoogste 20 overtallige waarnemingen. Grotere netwerken worden gesplitst in overlappende deelnetten.

De besproken publicatie bevat veel meer dan hier kan worden geschetst, onder andere nomogrammen ter bepaling van α en uitgewerkte voorbeelden. Zoals gewoonlijk had Baarda een uitvoerige studie van de internationale literatuur gemaakt. Hij geeft ook enkele citaten uit een boek van de bekende Amerikaanse statisticus R.L. Ackoff onder andere over meerdimensionele toetsen volgens een methode die hij de A-methode noemde. Vergenoegd lachend zei Baarda: "Dan noemen we onze manier de B-methode!".

Intermezzo

In 1971 was Baarda 25 jaar in dienst van de TH Delft. Hij wilde alleen een bescheiden interne receptie ter viering van dit jubileum. Mevrouw Baarda was kort tevoren getroffen door een beroerte en verbleef in een ziekenhuis. In 1970 was de Wet Universitaire Bestuurshervorming (WUB) ingevoerd, op grond waarvan ik eerder in 1971 tot decaan van de onderafdeling Geodesie was gekozen. In die functie heb ik hem in een korte toespraak oprecht bedankt voor zijn grote bijdragen aan de opbouw van de geodetische opleiding en aan het bestuur en beheer, naast zijn toewijding aan onderwijs en onderzoek. De volgende dag werd aan de jubilaris de zilveren erespeld van de TH uitgereikt. Ik ging met hem mee naar de voorzitter van het College van Curatoren ir. Schepers, een oud-directeur van Shell. Deze vroeg op een gegeven moment hoe het bij Geodesie ging onder de WUB. Baarda antwoordde: "'t Is een puinhoop. Alberda is nou decaan." Hij kon zich wel eens ontactisch uitdrukken. Schepers die hem wel kende, herhaalde: "Het is een puinhoop, dubbele punt, Alberda is nou decaan." Wij moesten er om lachen, ik wist wel dat het niet boosaardig bedoeld was.

Mevrouw Baarda keerde naar verloop van tijd naar huis terug met een gedeeltelijke verlamming. Haar toestand en de nodige verzorging legden een grote druk op Baarda, ook omdat huishoudelijke hulp soms moeilijk te krijgen was. Geleidelijk kreeg ook hij lichamelijke klachten. Hij bleef echter zijn functies volledig vervullen. Tot zijn emeritaat in 1982 verschenen van zijn hand nog circa 15 publicaties en daarna nog vele. Speciaal zijn theoretische wetenschappelijke werk zette hij levenslang voort: het hield hem overeind in moeilijke omstandigheden.

Geometrische en gravimetrische geodesie

In 1954 presenteerde Baarda op een IAG-congres in Florence een rapport getiteld *On the computation and adjustment of large systems of geodetic triangulation*. Het ging voor zover ik het kan beoordelen onder andere over vervormingen die het gevolg zijn van de projectie van punten op de geoïde respectievelijk de referentie-ellipsoïde. Volgens een getuige was Vening Meinesz bijzonder boos over de kritiek die impliciet op zijn opvattingen was gericht, waarbij gravimetrisch bepaalde schietloodafwijkingen een rol spelen. Maar dit was voordat ik bij de TH werkte.

Later was collega Meerdink, naast algemener werk, jarenlang bezig met onderzoek van vervorming door kleine verwaarlozingen bij de berekeningen van grote triangulaties.

Baarda schreef in 1963 een rapport *Modeleffecten in de geodesie*, hoofdzakelijk over de fysische geodesie, ter discussie in de Rijkscommissie voor Geodesie. "Die discussie heb ik afgedwongen" zei hij, en nodigde mij uit er bij te zijn. Hij begon zijn betoog met een exposé over de aanpak waarbij in de aanloop van de afleiding van de formule van Stokes het verschil in potentiaal tussen de geoïde en de ellipsoïde in een reeks bolfuncties wordt ontwikkeld. Daarbij worden de nulde orde- en de eerste ordeterm nul gesteld door aan te nemen dat de twee lichamen gelijke massa's en samenvallende zwaartepunten hebben. Hij bekritiseerde die aanpak en stelde dat dit tot ongewenste effecten zou leiden. Op een gegeven moment onderbrak Vening Meinesz – overigens een zeer hoffelijk man – hem met: "Nee, nee jonker ....." en vervolgde met de uitleg hoe het werkelijk zat. Voorzitter Roelofs vroeg: "Waar maken we ons dan druk over?" Vening Meinesz: "We hoeven ons ook helemaal niet druk te maken." De discussie werd geen succes voor Baarda. Deze aanraking met de fysische geodesie kwam naar mijn mening vooral voort uit zijn opvatting over het inschakelen van mathematische modellen en betekende geen wending van zijn aandacht naar de gravimetrische geodesie, zoals uit zijn vele publicaties in de volgende jaren blijkt. Pas in 1979 verscheen *A connection between geometric and gravimetric geodesy. A first sketch*. Het was een hommage aan de grote Italiaanse geodeet Antonio Marussi. Zoals de titel aangeeft is het geen afgeronde studie maar eerder een soort terreinverkenning. Het onderwerp heeft hem verder levenslang bezig gehouden (zoals overigens de hele geodesie).

Ik heb nog verschillende publicaties van hem over het onderwerp vertaald maar dat betrof grotendeels kleine stukken tekst in een zee van formules. Een inhoudelijk overzicht moet ik aan een deskundige overlaten: mijn eigen studie van de fysische geodesie eindigde met mijn laatste examen, dat ik in 1954 bij Vening Meinesz aflegde.

Vereffeningstheorie

De naam van dit vak werd door Baarda ingevoerd omstreeks 1967 nadat het jarenlang als 'waarnemingsrekening' werd aangeduid, ook door Baarda. De oudere benaming is afkomstig van Tienstra, waarschijnlijk als vertaling van de titel *The calculus of observations* van een (uiteraard nu verouderd) boek van Whittaker en Robinson uit 1932 over numerieke analyse. Het boek bevat ongeveer 100 bladzijden over normale verdelingen en de methode der kleinste kwadraten. Hoewel klassiek getint (met ware waarden!) zijn die bladzijden nog interessante lectuur. Tienstra karakteriseerde de in de praktijk voorkomende vereffeningsproblemen door een indeling in vijf standaardvraagstukken, waarvan hij de oplossing gaf, onder meer gebruik makend van zijn beroemde resultaten betreffende correlerende waarnemingen en vereffening in fasen.

In mijn studententijd baseerde Baarda zich hoofdzakelijk op de 'Cursus waarnemingsrekening' voor het onderwijs. In 1955 volgde ik zijn college waarnemingsrekening v.c. (voortgezette cursus), ik denk een keuzevak. Ik weet niet hoe het begincollege voor tweedejaars werd gegeven, maar in de v.c. werden correlerende waarnemingsgrootheden ingevoerd evenals de Ricci-notatie. Naast 'gewone' waarnemingsgrootheden p^i die rechtstreeks in een vereffening voorkomen voerde hij p^r-grootheden in van drie typen: Type I: p^r-grootheden die correleren met de p^i maar niet algebraïsch afhankelijk daarvan zijn; Type II: functies van vereffende p^i zijn; Type III: samenstellende grootheden, waarvan de p^i functies zijn.
Baarda moet daar ook met de tweedejaars studenten over gesproken hebben want toen ik hen instructie gaf zeiden ze dat ze niets van die p^r-grootheden snapten. Ik gaf wat voorbeelden aan de hand van een waterpasnet. De reactie was: "O, is dat alles?" Op een stafbespreking stelde ik Baarda voor om bij de theoretische behandeling wat voorbeelden te geven. Het antwoord was een dooddoener: "voorbeelden zijn niet wezenlijk". Mijn repliek: "voor het begrip van groene studenten zijn ze wel wezenlijk". Bij een latere stafbespreking vertelde hij dat hij voorbeelden had gegeven.

Overigens gaf het derdejaars college een complete behandeling, waarbij ook naar de standaardvraagstukken van Tienstra werd verwezen. Na enkele maanden volgde een even grondige behandeling van onderwerpen uit de mathematische statistiek met onder andere afleidingen van de chi-kwadraat- en F-verdelingen plus de schattingstheorie.

Tienstra had in zijn cursus, die later in boekvorm verscheen, de Ricci-notatie uit de tensoranalyse ingevoerd, na eerst in de inleiding uitvoerig uitgeschreven stelsels vergelijkingen te hebben gebruikt. Hij was vertrouwd met tensoranalyse omdat hij in de jaren dertig colleges aan de Universiteit van Amsterdam had gevolgd. Als voorbeeld kan dienen de matrix van de coëfficiënten van de normaalvergelijkingen bij een vereffening met voorwaardevergelijkingen, die werd geschreven als:

$$G^{\rho\sigma} = g^{ik} u_i^{\rho} u_k^{\sigma}$$

met sommatie over gelijke boven- en onderindices. Je raakte er gauw aan gewend. Baarda heeft deze notatie lang gehandhaafd, maar omdat in de praktijk steeds meer met matrices werd gewerkt schakelde hij omstreeks 1970 op een eigenzinnige wijze over op de matrixnotatie door om elk symbool haken te zetten en de verkregen matrices in de juiste volgorde te zetten met als resultaat:

$$(G^{\rho\sigma}) = (u_i^{\rho})(g^{ik})(u_k^{\sigma})^*$$

In gewone matrixnotatie kan die formule worden geschreven als bijvoorbeeld:

$$N = UQU^T$$

Het is een raadsel waarom Baarda die keus niet heeft gemaakt. Afgezien van een rustiger typografisch beeld, vijf tekens tegenover 21 is een aardige bezuiniging.

In 1949 had de Deense geodeet Henri Jensen in Bulletin Géodesique de vereffeningstheorie al in de matrixnotatie behandeld. Na Baarda's emeritaat zijn de docenten in de vereffeningstheorie overgeschakeld op de 'gewone' matrixnotatie, uiteraard zonder afbreuk te doen aan Baarda's rijke resultaten.

Emeritaat

Op 5 november 1982 ontving Baarda het eredoctoraat van de Universiteit van Stuttgart. Het was een prachtige bekroning van een nationaal en internationaal vooraanstaand wetenschapper. De erepromotor Grafarend loofde in zijn 'laudatio' Baarda's baanbrekend werk, ook als contrast met sommige hoogleraren die als organisator vaak meer bezig zijn met fondsen te verwerven dan met eigen onderzoek.

Kort daarop, op 26 november 1982, ging Baarda officieel met emeritaat. Voor een groot publiek sprak hij zijn magistrale afscheidsrede uit. Mevrouw Baarda was gelukkig aanwezig en werd door de volgende sprekers ook hartelijk toegesproken. Namens de Nederlandse geodetische gemeenschap sprak ir. A. Waalewijn grote waardering en dank uit. Namens de Afdeling der Geodesie sprak ikzelf. Na een geestige toespraak van H.C. van der Hoek boden twee medewerkers en promovendi de tweedelige Feestbundel ter gelegenheid van Baarda's 65e verjaardag aan. De laudatio van Grafarend en Baarda's dankwoord zijn gepubliceerd in Geodesia, 25e jaargang no. 1 van januari 1983. Een verslag van het officiële afscheid staat in dezelfde jaargang van Geodesia no. 2 van februari 1983.

Met zijn officiële afscheid kwam er geenszins een einde aan Baarda's activiteiten. Nog vier geodeten promoveerden bij hem. Eind 1982 trad hij af als voorzitter van de Nederlandse Commissie voor Geodesie, na van 1957 tot 1980 secretaris te zijn geweest. Hij bleef actief lid tot 31 december 1996 en werd benoemd tot erelid (even actief). Hij bleef zich tot het einde toe interesseren voor de hele geodesie en werkte door aan onderzoek, speciaal aan de verbinding van geometrische en gravimetrische geodesie.

Om met de woorden van de huidige voorzitter van de NCG te spreken: "Baarda blijft in onze herinnering als een unieke persoonlijkheid en een van de grootste geodeten van onze tijd".