

DE GEOÏDE VOOR NEDERLAND

ERIK DE MIN

1996

CIP-GEGEVENS KONINKLIJKE BIBLIOTHEEK, DEN HAAG

Min, Erik de

De geoïde voor Nederland / Erik de Min. - Delft :
Nederlandse Commissie voor Geodesie. Ill. -
Publikatie / Nederlandse Commissie voor Geodesie ; 34)
Met lit. opg.
ISBN 90-6132-257-X
Trefw.: geodesie / gravitatie

Druk en bindwerk: Meinema Drukkerij, Delft

Inhoud

Samenvatting	5
Summary	7
1 Inleiding	9
2 Geoïdeberekening	13
2.1 Stokes formule	13
2.2 Combinatieoplossing	16
2.3 Berekening van N_2	18
2.3.1 Numerieke integratie over blokwaarden	19
2.3.2 Numerieke integratie over punten	22
2.3.3 Collocatie	24
2.3.4 Vergelijking van de drie methoden	28
2.4 Keuze van de covariantiefunctie	35
2.4.1 Empirische covariantiefunctie	35
2.4.2 Bepalen van een graadvariantiemodel bij de empirische covariantiefunctie	39
2.5 Fout in de geoïde	42
2.6 Kernfunctiemodificaties	50
2.7 Keuze van een kernfunctiemodificatie	58
2.8 Procedure voor de geoïdeberekening	65
3 Zwaartekrachtdata in en om Nederland	67
3.1 Het nieuwe Nederlandse zwaartekrachtnet	68
3.2 Beschrijving van de overige databestanden	75
3.3 Analyse en vergelijking van de databestanden	80
3.4 Gebruik van de datasets	93
4 Berekening van gemiddelde blokwaarden	96
4.1 Berekening van gemiddelde waarden	96
4.2 Berekening van foutvarianties en foutcovarianties	98
4.3 Keuze van datadichtheid en blok grootte	100
4.4 Tests gemiddelde-blokwaardenberekening	101
4.5 Berekening van gemiddelde waarden in en rondom Nederland	116
5 Andere beschikbare databestanden	120
5.1 Geopotentialmodellen	120
5.2 Overige relevante databestanden	121
5.3 Topografie	124

6	Geoïdeberekening: tests	126
6.1	Geoïdeberekeningspunten bij numerieke integratie	126
6.2	Verskillende methoden voor geoïdeberekening	128
6.2.1	Consistentie numerieke integratie over blokken of punten en col- locatie	128
6.2.2	Kernfunctiemodificaties	134
6.3	Geoïde-effect van de testparameters uit paragraaf 4.4	137
6.4	Fout in de geoïde	138
6.4.1	Foutberekening geopotentialmodel en de vorm van het correc- tievlak	138
6.4.2	Foutberekening binnengebieddata	141
6.5	Keuze van het binnengebied	145
6.6	Vergelijking gravimetrische geoïdeberekeningen met GPS/ H en ξ/η . . .	150
6.7	Conclusies	153
7	Modelfouten	155
7.1	Molodenskii oplossing	155
7.2	Stokes oplossing	159
7.3	Atmosfeer-effect	161
7.4	Ellipsoïdische correcties	161
7.5	Conclusies	164
8	Geoïde voor Nederland	166
8.1	Procedure voor de geoïdeberekening voor Nederland	166
8.2	Berekening van de gravimetrische geoïde	170
8.3	Geoïde, waterpassen en GPS	177
8.4	Geoïde en schietloodafwijkingen	177
8.5	Bepaling van de met GPS/ H en ξ/η verbeterde geoïde	180
8.6	Vergelijking met andere geoïdes	189
8.7	Geoïde in andere referentiestelsels	192
8.8	Gebruik van de geoïde in de praktijk	198
9	Conclusies	200
	Literatuur	203
A	Spectrale uitdrukkingen en relaties voor zwaartekrachtveld-afhankelijke functies	210
A.1	Spectrale uitdrukkingen en relaties	210
A.2	Collocatie	213
B	Lopend-gemiddelde-operator	217
C	Overhauser-splines	219

Samenvatting

De combinatie van GPS-metingen met geoidhoogteverschillen levert orthometrische hoogteverschillen op die kunnen worden gebruikt als controle op, of vervanging van waterpasmetingen. Omdat voor deze orthometrische hoogten (NAP-hoogten) voor veel toepassingen een cm-precisie gewenst is, dient ook de geoid op dit precisie-niveau bekend te zijn. Om de geoid zo precies te bepalen is een drietal zaken van belang: om te beginnen de dichtheid en kwaliteit van de beschikbare zwaartekrachtdata, daarnaast de kwaliteit van de theoretische oplossing van het randvoorwaardeprobleem voor de bepaling van de geoid, en bovendien is, voor de praktische geoidberekening, de kwaliteit van de rekenmethoden, uit eerder genoemde theoretische oplossing, van belang. De beschrijving van deze probleemgebieden komt in dit proefschrift aan de orde, met als doel de daadwerkelijke geoidberekening voor Nederland.

Allereerst richten we ons op de techniek van geoidbepaling met behulp van de Stokes oplossing voor het randvoorwaardeprobleem. Hier worden de numerieke integratie van Stokes formule en de kleinste-kwadraten collocatiemethode beschreven en met elkaar vergeleken. Er wordt getoond dat beide methoden voor praktische berekeningen niet dezelfde resultaten opleveren. Voor de bepaling van empirische covariantiefuncties, die nodig zijn voor collocatie en foutberekeningen, wordt een nieuwe techniek voorgesteld. De praktische geoidberekening zal worden uitgevoerd door een combinatie van globale zwaartekrachtinformatie uit een geopotentialmodel en regionale zwaartekrachtmetingen en gemiddelde zwaartekrachtwaarden. De verschillende mogelijkheden van combineren via kernfunctiemodificaties worden daartoe op een originele manier geïntroduceerd. Tevens wordt een formele foutvoortplanting van zwaartekrachtdata naar geoidhoogte(verschillen) behandeld.

Vervolgens worden de data behandeld die beschikbaar zijn voor de geoidbepaling voor Nederland. Aan het nieuw gemeten zwaartekrachtnet voor Nederland wordt uitgebreid aandacht geschonken, waarna een analyse en vergelijking volgen van de beschikbare (oude en nieuwe) zwaartekrachtdatasets. Daarna wordt beschreven hoe uit de gemeten puntzwaartekrachtwaarden optimaal de gemiddelde blokwaarden kunnen worden bepaald, en hoe de foutberekening daarbij verloopt. Ten slotte wordt de overige informatie beschreven die van belang is voor de geoidberekening: het geopotentialmodel, geoidhoogten uit de combinatie van GPS- en waterpasmetingen, en schietloodafwijkingen. Deze laatste twee leveren onafhankelijke geoid-informatie.

Op basis van de beschikbare zwaartekrachtdata worden diverse geoidtests gedaan. Hierbij wordt ingegaan op de invloed van predictie-parameters van gemiddelde zwaartekrachtblokwaarden, de verschillende kernfunctiemodificaties en de evaluatietechnieken. Tevens wordt een vergelijking met onafhankelijke geoid-informatie uitgevoerd.

Alvorens de geoidberekening te kunnen uitvoeren wordt de kwaliteit van de Stokes oplossing voor geoidbepaling nader bestudeerd, waarbij we ons richten op de Nederlandse

situatie. We kijken naar een betere oplossing voor het randvoorwaardeprobleem door Molodenskii, en naar de invloed van atmosfeeraantrekking en ellipsoïdische correcties. Hieruit blijkt dat het voor Nederland mogelijk moet zijn om cm-precisie te bereiken voor geoidhoogteverschillen.

Het proefschrift wordt afgesloten met de beschrijving van de daadwerkelijke geoidberekening voor Nederland. De procedure die is gevolgd is een combinatie van de methoden van Meissl en Wong&Gore met $L = 32$. Er wordt gebruik gemaakt van het OSU91A geopotentialmodel en de nieuwe Nederlandse data en overige Europese data in een gebied van 5° rondom Nederland, waarmee $3' \times 5'$ gemiddelde waarden zijn bepaald. Tevens is de formele foutvoortplanting uitgevoerd. Vervolgens wordt een vergelijking met GPS- en waterpasmetingen, en met schietloodafwijkingen gemaakt. Hiermee wordt een correctievlak bepaald om tot de best mogelijke geoid voor Nederland te komen. Tenslotte wordt de berekende WGS84-geoid ook getransformeerd naar het lokale Nederlandse Bessel-referentiesysteem. Het blijkt dat de geoid binnen Nederland met een precisie van 1 tot enkele cm is bepaald.

Dankwoord

Vanzelfsprekend gaat mijn dank uit naar mijn promotoren Reiner Rummel en Roland Klees. Martin van Gelderen, Govert Strang van Hees, Jeanette Simon, Raymond Feron en Wim Groenewoud wil ik bedanken voor het op kritische wijze beoordelen van (delen van) het concept. Axel Smits heeft de mooie omslag verzorgd, waarvoor mijn hartelijke dank. Mijn collega's bij FMR en de MD hebben er voor gezorgd dat ik de afgelopen 5 jaar in een (voor mij) zeer plezierige omgeving aan dit project heb gewerkt.

De volgende organisaties worden bedankt voor het beschikbaar stellen van zwaartekrachtdata of GPS/waterpasgegevens voor de berekening van de geoid voor Nederland: Meetkundige Dienst van de Rijkswaterstaat, Delft; Bureau Gravimétrie International, Toulouse Cedex, Frankrijk; British Geological Service, Edinburgh, Schotland; Institut für Erdmessung, Universiteit Hannover, Hannover, Duitsland; Shell, Den Haag; Nederlandse Aardolie Maatschappij, Assen.

Het uitvoeren van dit onderzoek is mede mogelijk gemaakt door een financiële bijdrage van de Cornelis Lely Stichting van de Rijkswaterstaat.

Summary

The geoid for the Netherlands

By combining GPS-measurements and geoid height differences, orthometric height differences are obtained. These can be used as control of or substitute for spirit levelling. Because for many purposes the orthometric heights (NAP-heights) are required with cm-precision, the geoid needs to be known with cm-precision as well. To determine the geoid so precisely three topics are of importance. First, the density and quality of the available gravity data; second, the quality of the theoretical solution of the boundary value problem of geoid determination; and third for practical geoid computation, the quality of the computational techniques, based on this theoretical solution. These problems will be described in this thesis, whereafter the actual geoid computation for the Netherlands is done.

First, we focus on the technique of geoid computation using Stokes solution for the boundary value problem. Numerical integration and least-squares collocation are described and compared, and it is shown that both methods do not yield identical results for practical geoid computations. For the determination of empirical covariance functions, which are needed for collocation and error computations, a new technique is proposed. The actual geoid computation will be done by combining global gravity information with regional gravity measurements and mean block values. Several possibilities to combine these data by kernel modifications are introduced in a new way. Subsequently the formal error propagation of gravity data to geoid height (differences) is discussed.

Furthermore the data available for the Netherlands geoid computation are described. The newly measured gravity network in the Netherlands obtains much attention, which also includes the analysis and comparison of the available (old and new) gravity datasets. The optimal way to compute mean gravity block values from measured point gravity values is described, followed by the error propagation. Finally the remaining datasets which are available for geoid computation are described: the global geopotential model, geoid heights from combined GPS and levelling measurements and deflections of the vertical. Of these datasets, the last two are external sources for geoid information.

Based on the available gravity data, several geoid tests are performed. Besides the influence of prediction parameters of mean gravity block values, the effect of kernel modifications and different evaluation techniques is studied. A comparison with independent geoid information is made as well.

Before doing the geoid computation, we have a closer look at the quality of Stokes solution, where we focus on the Netherlands case. The better solution of Molodenskii for the boundary value problem is studied, and we look at the effects of atmospheric

attraction and ellipsoidal corrections. It is deducted that for the Netherlands situation it must be possible to achieve cm-precision for geoid height differences.

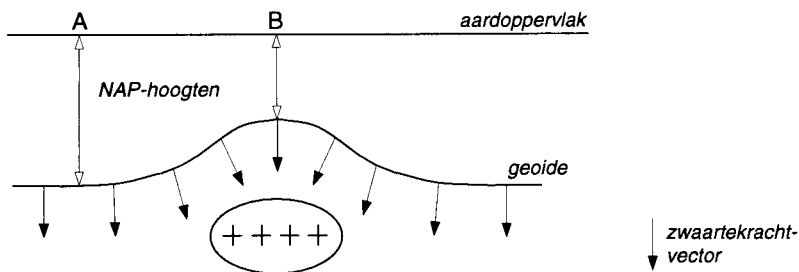
The thesis is finished with a description of the actual geoid computation for the Netherlands. The applied procedure is the combined Meissl/Wong&Gore method with $L = 32$. The OSU91A global geopotential model is used, with the new Netherlands data and European data in an inner zone of 5° around the Netherlands, with which $3' \times 5'$ mean block values are computed. A formal error propagation is applied. Subsequently comparisons with GPS/levelling data and deflections of the vertical are given. Based on these data a correction surface is determined to obtain the best possible geoid for the Netherlands. The computed WGS84-geoid model is also transformed to the local Netherlands Bessel reference system. It may be concluded that the geoid within the Netherlands has been determined with a precision of 1 to several cm.

1 Inleiding

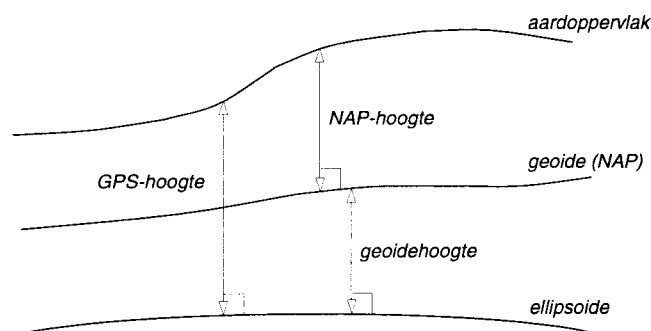
Het doel van de (hogere) geodesie is het bepalen van de vorm en het externe zwaartekrachtveld van de aarde. Dit omvat zowel een geometrisch deel, de vorm van de aarde, als een fysisch deel, het zwaartekrachtveld, welke sterk met elkaar samenhangen. In het algemeen wordt in de geodesie met 'het bepalen van de vorm van de aarde' zowel het oplossen van het geometrische als het fysische probleem bedoeld.

Het fysische aardoppervlak is de grens tussen de atmosfeer en de vaste en vloeibare massa. Op land heeft dit aardoppervlak een zeer onregelmatig verloop en kan niet door middel van eenvoudige wiskundige relaties worden gerepresenteerd, maar slechts met behulp van meetpunten. Het oceaanooppervlak echter, dat 70% van het aardoppervlak bedekt, kan onder bepaalde aannamen worden gezien als een gedeelte van een zogenaamd niveauvlak, een vlak van gelijke zwaartekrachtpotentiaal. Dit equipotentiaalvlak kan worden doorgedacht onder (en boven) de continenten en op die manier worden beschouwd als de vorm van de aarde. Deze wordt geoïde genoemd. Al in 1828 gebruikte Gauss deze definitie voor het bepalen van de vorm van de aarde (Torge, 1991).

De geoïde is het referentievlak van orthometrische hoogten. Het NAP-vlak is dus de geoïde, afgezien van een eventueel klein en constant hoogteverschil dat we hier verder zullen verwaarlozen. De orthometrische hoogte van een punt op het aardoppervlak is de afstand tussen dat punt en de geoïde, gemeten langs de loodlijn. De richting van de zwaartekracht in een punt op de geoïde is loodrecht op de geoïde. Vice versa betekent dit dat het geoïdeverloop door de richting van de zwaartekracht wordt bepaald. In figuur 1.1 is te zien dat bij een lokale verstoring van de massadichtheid de zwaartekrachtvectoren zich niet naar het middelpunt van de aarde richten, maar daar licht van zullen afwijken. De geoïde zal hierdoor een 'bult' vertonen, en bij een geometrisch vlak aardoppervlak zal boven de massaverstoring de NAP-hoogte kleiner zijn dan in de omliggende punten. Punt B ligt dus lager dan punt A.



Figuur 1.1 Geoïde en zwaartekrachtvectoren.



Figuur 1.2 Relaties tussen aardoppervlak, geoïde en ellipsoïde.

Tot voor kort was de geoïde een onmisbare schakel in de bepaling van het oppervlak van de aarde. Men kon door middel van horizontale positiebepaling (ligging) en waterpassing ten opzichte van de geoïde bepalen hoe het aardoppervlak eruit zag. De combinatie van deze metingen met de geoïde leverde het werkelijke aardoppervlak op. Tegenwoordig is het met satellietmethoden zoals het Global Positioning System (GPS) op eenvoudige wijze mogelijk direct de vorm van het aardoppervlak te bepalen. De geoïde is echter nog steeds van groot belang, door het combineren van GPS-metingen met geoïdehoogten kunnen namelijk de orthometrische hoogten worden berekend (zie figuur 1.2). Dit wordt in de praktijk vaak aangeduid met 'waterpassen met GPS'. Op deze manier kunnen voor bepaalde toepassingen waterpasmetingen worden gecontroleerd of vervangen. Met name als men over grotere afstanden orthometrische hoogteverschillen wil bepalen waarbij niet de hoogste precisie wordt verlangd, kan dit een goed alternatief zijn.

Er is in het verleden een lange weg gegaan, voordat de vorm van de aarde zeer precies bepaald kon worden. Tot in de 17e eeuw werd door wetenschappers algemeen aangenomen dat de aarde een bolvorm had. Newton was één van de eersten die een afgeplatte aarde beschreef. Waar de afplatting zich precies bevond was echter nog een punt van discussie. Pas in 1737 kon de controverse tussen Newton-aanhangers (afplatting aan de polen) en Cassini-aanhangers (afplatting aan de evenaar) worden beslecht in het voordeel van de eersten (Torge, 1991). De beschrijving middels een ellipsoïde volgde uit het oplossen van het gravitationele evenwicht voor een homogene en uniform roterende massa (Chandrasekhar, 1969). In de eerste helft van de 19e eeuw werd aan onder meer Laplace, Gauss en Bessel duidelijk dat een ellipsoïdisch model niet voldoende was om de vorm van de aarde te beschrijven. Doordat de massadichtheid niet constant is binnenin de aarde wist men dat het niveauvlak niet samenviel met de ellipsoïde (Helmert, 1880). Door Gauss wordt in 1828 de geoïde als beschrijving van de vorm van de aarde geïntroduceerd. Stokes was de man die in 1849 liet zien hoe de geoïde kan worden berekend als voor alle punten op de geoïde de zwaartekrachtwaarde gegeven is. In de periode 1880-1950 was de bepaling van de geoïde, met behulp van de oplossing van Stokes, het belangrijkste doel van de (hogere) geodesie (Torge, 1991).

De eerste geoïde op wereldwijde schaal is berekend door Hirvonen. Hij deed dit in 1934

op basis van $500 \times 500 \text{ km}^2$ gemiddelde zwaartekrachtwaarden. Eind jaren '40 werd (met $1^\circ \times 1^\circ \approx 110 \times 70 \text{ km}^2$ data) een betere geoïde voor Europa bepaald door Tanni en in 1957 berekende Heiskanen met meer zwaartekrachtdata van betere kwaliteit een nog betere geoïde. De precisie van dit resultaat wordt geschat in de orde van enkele meters (Heiskanen&Moritz, 1967).

Rond 1960 introduceerde Molodenskii een geheel nieuw concept om de vorm van de aarde te bepalen. Bij de bepaling van het aardoppervlak werd daarbij geen gebruik gemaakt van de geoïde, maar van de telluroïde. Het grote voordeel van dit concept is dat hierbij geen aannamen hoeven worden gedaan over de massadichtheid van de aarde. Enkele jaren later werd door Krarup de 'geïntegreerde geodesie' geïntroduceerd, waarbij alle geodetische metingen tegelijk kunnen worden gebruikt om de vorm van de aarde te bepalen.

De stap naar de berekening van (lokale) geoidmodellen met dm-precisie werd in de jaren 1970-1985 gemaakt. Hierbij was het werk van Mather (1973) en Moritz (1974) van groot belang. Door hen zijn verbeteringen in het berekeningsmodel tot op dm-niveau bediscussieerd. Hierbij is met name aandacht geschonken aan het atmosfeer-effect, de topografie en de bolbenadering. Vervolgens werd het gebruik van wereldwijde geopotentialmodellen in combinatie met lokale zwaartekrachtdata geïntroduceerd. Rapp&Rummel (1975) hebben hiervan een compleet en helder overzicht gegeven. Een belangrijke mijlpaal was de totstandkoming van de eerste hoge-orde zwaartekrachtmodellen die door Rapp zijn bepaald (OSU81, OSU86) met een relatieve precisie van enkele dm's door combinatie van satellietmetingen én terrestrische zwaartekrachtinformatie. Voor Europa (EGG1, Torge e.a., 1984b) en Nederland (Van Willigen, 1985) zijn er geoïdeberekeningen gedaan met relatieve dm-precisie, en eind jaren '80 werd duidelijk dat er behoefte ontstond aan lokale cm-preciese geoidmodellen in verband met het genoemde 'waterpassen met GPS'.

Momenteel bevinden we ons in de fase dat ook daadwerkelijk wordt getracht de geoïde met cm-precisie te bepalen. Voor lokale geoïdeberekeningen ten behoeve van waterpassen met GPS is zwaartekrachtdata voorhanden die dit in principe mogelijk moet maken. Voor mondiale geoidmodellen op cm-niveau, van belang voor geodetische (hoogtedatum-probleem), oceanografische en geofysische doeleinden, is de beschikbare data nog onvoldoende. Hetzij wat betreft de punt dichtheid, hetzij wat betreft de precisie, of beide. Voor het mondiaal bepalen van het zwaartekrachtveld zal gradiometrie, het meten van de tweede afgeleide van de zwaartekracht potentiaal vanuit satellieten een belangrijke rol gaan spelen. In dit proefschrift richten we ons op het bepalen van de geoïde voor Nederland.

Het bepalen van de geoïde met cm-precisie vraagt ten opzichte van de vroegere dm-precisie meer dan alleen betere zwaartekrachtdata. In het oorspronkelijke berekeningsmodel komen benaderingen voor die op dm-niveau acceptabel zijn, op cm-niveau zijn ze dat echter niet meer. Deze problematiek wordt nu en dan wat onderschat, bij de meeste praktische berekeningen wordt namelijk gebruik gemaakt van het werk van Mather en Moritz, waarbij 'slechts' op dm-precisie werd gemikt. Met name de invloed van topo-

grafie (in de Molodenskii reeks) op de bepaling van de cm-geoïde zou meer aandacht mogen krijgen. Voor Nederland speelt deze problematiek geen rol van betekenis.

Het verschil tussen de geoïderesultaten bepaald met diverse evaluatietechnieken is van cm-orde. Dit was tot nog toe acceptabel, maar dat is nu niet meer het geval. Aan deze zaken wordt in dit proefschrift aandacht geschonken. Hierbij zal niet worden ingegaan op de theorie van de geoïdebepaling, maar op de technieken die worden gebruikt om de geoïde daadwerkelijk te berekenen. Anders gezegd: hoe dient Stokes' *theoretische* oplossing voor het geodetisch randvoorwaardeprobleem te worden gebruikt voor *praktische* geoïdebepaling?

In hoofdstuk 2 zal op deze vraag een gedetailleerd antwoord worden gegeven. De combinatie van verschillende beschikbare zwaartekrachtdatabronnen, met wereldwijde en lokale informatie, speelt hierbij een centrale rol. Tevens zullen verschillende technieken worden beschreven om de analytische oplossing van Stokes, gebaseerd op continue zwaartekrachtdata, in te schakelen in de berekening met discrete zwaartekrachtdata. Deze technieken zijn vergeleken, en de formele foutberekening wordt beschreven.

In hoofdstuk 3 worden de beschikbare zwaartekrachtdata in en rondom Nederland beschreven, waarna in hoofdstuk 4 wordt getoond hoe daaruit gemiddelde blokwaarden zijn bepaald. In hoofdstuk 5 zijn vervolgens de overige data beschreven die beschikbaar zijn (geopotentialmodellen, schietloodafwijkingen en GPS/waterpas-metingen).

In het zesde hoofdstuk wordt bekeken hoe groot het effect is op de geoïde van a) verschillende variabelen voor de predictie van de gemiddelde zwaartekrachtwaarden, van b) verschillende combinatieberekeningen (kernfunctiemodificaties), en c) het gebruik van numerieke integratie of collocatie. Bovendien is in dit hoofdstuk de formele foutvoortplanting toegepast. De benodigde correcties voor benaderingen in de Stokes oplossing zijn in hoofdstuk 7 kort behandeld.

Tenslotte zal in hoofdstuk 8 de geoïde voor Nederland worden berekend en gepresenteerd. Hierbij komen tevens aan de orde de foutbeschrijving, de vergelijking met externe geoïde-informatie, en de transformatie van WGS84 naar Bessel die voor de Nederlandse praktijk van belang is. De conclusies over de geoïdeberekeningstechnieken en over de geoïde voor Nederland in hoofdstuk 9 sluiten het proefschrift af.

De hoofdstukken 2, 4, 6 en 7 behandelen de theorie en technieken die van belang zijn bij geoïdeberekening, hierbij wordt gekeken naar de bepaling van geoïdehoogteverschillen (relatieve geoïdehoogten). De zwaartekrachtdata voor de Nederlandse geoïdeberekening en de uiteindelijke geoïdeberekening worden beschreven in de hoofdstukken 3, 5 en 8.

2 Geoïdeberekening

De Stokes integraal formule geeft aan hoe de geoïdehoogte $N(P)$ in een punt P kan worden uitgerekend uit de vrijelucht zwaartekrachtanomalieën Δg op aarde. Deze formule is de kern van dit proefschrift, want hiermee wordt de geoïde voor Nederland berekend. Deze formule zal worden behandeld in 2.1, waarna in 2.2 en 2.3 wordt aangegeven hoe de geoïdeberekening in de praktijk met deze formule wordt uitgevoerd. Paragraaf 2.4 gaat dan dieper in op de covariantiefunctie die wordt gebruikt bij de collocatie geoïdeberekeningsmethode en ook in hoofdstuk 4 bij de berekening van de fout in de gemiddelde blokwaarden. Vervolgens wordt in 2.5 de foutvoortplanting beschreven van de fout in de zwaartekrachtanomalieën en van de overige fouten. Het laatste deel van dit hoofdstuk gaat over zogenaamde kernfunctiemodificaties, die worden toegepast om de fout in de geoïde te verkleinen door een optimaal gebruik van de beschikbare data te realiseren.

2.1 Stokes formule

In deze paragraaf zullen de Stokes formule en enkele andere belangrijke formules worden geïntroduceerd, evenals enkele notatiedefinities. De formule om de geoïdehoogte $N(P)$ in het punt P te berekenen uit de zwaartekrachtanomalieën Δg in sferische benadering is de Stokes integraal

$$T(P) = \frac{R}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} St(\psi_{PQ}) \Delta g(Q) \cos \varphi_Q d\varphi_Q d\lambda_Q, \quad (2.1)$$

gecombineerd met Bruns formule

$$N(P) = \frac{T(P)}{\gamma}, \quad (2.2)$$

waarin $T(P)$ de stoorpotentiaal in het punt P op de geoïde is, en $T(P) = W(P) - U(P)$ met $W(P)$ de zwaartekrachtspotentiaal en $U(P)$ de normaal potentiaal,

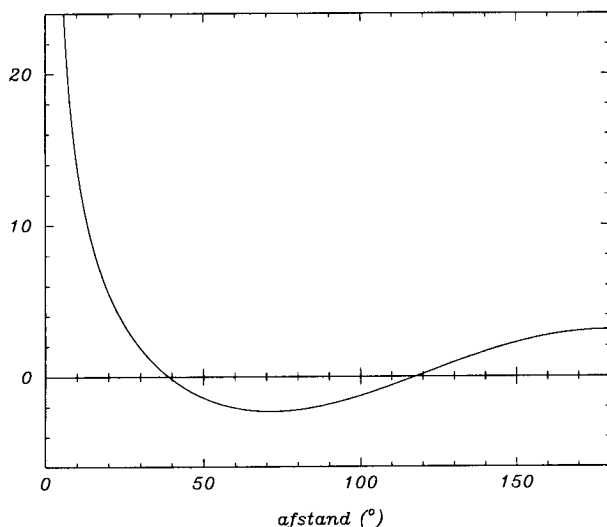
γ de gemiddelde normaalzwaartekracht op de ellipsoïde ($9.797644656 \text{ ms}^{-2} = 979764.4656 \text{ mgal}$ (Moritz, 1980b)),

R de gemiddelde aardstraal (6371008.7714 m),

Δg de vrijelucht zwaartekrachtanomalie $\Delta g = g_P - \gamma_Q$, met g_P de zwaartekracht op de geoïde en γ_Q de normaalzwaartekracht op de ellipsoïde, waarbij de punten P en Q zijn gerelateerd via de ellipsoidische normaal,

St Stokes functie,

φ en λ de geocentrische coördinaten van punt Q .



Figuur 2.1 Stokes functie $St(\psi)$.

Figuur 1.2 laat zien hoe de verschillende (referentie)vlakken ten opzichte van elkaar liggen. De Stokes functie $St(\psi)$, die is weergegeven in figuur 2.1, kan worden gezien als een gewichtsfunctie. Zwaartekrachtanomalieën dichtbij het berekeningspunt P krijgen een groot gewicht, anomalieën verder weg van P krijgen een kleiner gewicht. De analytische uitdrukking voor de Stokes functie is

$$St(\psi) = \frac{1}{s} - 6s - 4 + 10s^2 - (3 - 6s^2) \ln(s + s^2), \quad (2.3)$$

waarin $s = \sin(\frac{\psi}{2})$, maar de Stokes functie kan ook worden geschreven als een reeks

$$St(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi), \quad (2.4)$$

met $P_n(\cos \psi)$ de Legendre polynoom van graad n . Uit (2.3) kan men aflezen dat $\lim_{\psi \rightarrow 0} St(\psi) = \infty$.

De combinatie van (2.1) en (2.2)

$$N(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} St(\psi_{PQ}) \Delta g(Q) \cos \varphi_Q d\varphi_Q d\lambda_Q, \quad (2.5)$$

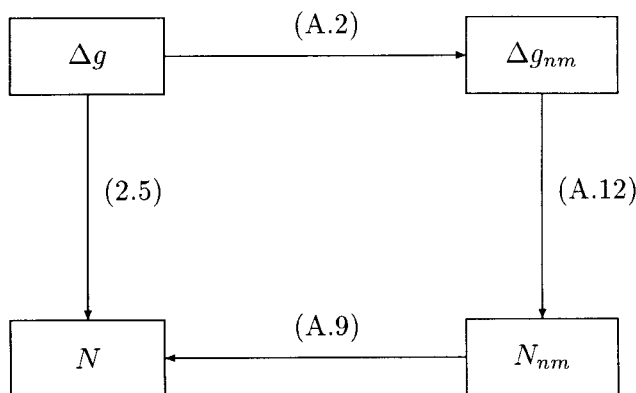
wordt ook Stokes integraal formule genoemd. In vergelijking (2.5) kan worden gezien dat de integraal over Q over het gehele aardoppervlak is. De zwaartekrachtanomalieën Δg moeten zijn gegeven voor ieder punt op aarde. Al deze vergelijkingen met hun afleiding kunnen worden gevonden in bijvoorbeeld (Heiskanen&Moritz, 1967). Daarin wordt ook uitgelegd hoe de zwaartekrachtanomalieën worden bepaald. In (2.5) hoort eigenlijk ook nog de term N_o te worden opgenomen. Deze constante bijdrage voor de geoïdehoogte wordt veroorzaakt door een verschil in de massa van de referentie-ellipsoïde en de werkelijke aarde en een verschil in normaalpotentiaalwaarde van de

ellipsoïde en de potentiaalwaarde van de geoïde. Omdat deze verschillen niet bekend zijn is ook de N_0 -term niet te bepalen. In dit proefschrift houden we ons hier verder niet mee bezig omdat we geïnteresseerd zijn in geoïdehoogteverschillen voor Nederland, waarbij de constante term wordt geëlimineerd.

De stoorpotentiaal T voldoet aan Laplace vergelijking, $\nabla^2 T = 0$, buiten de geoïde (Heiskanen&Moritz, 1967). Dit geldt onder de aanname dat er zich geen massa bevindt buiten de geoïde. Dit is in werkelijkheid niet helemaal zo, dit wordt in hoofdstuk 7 verder bekeken, samen met enkele andere benaderingen in de Stokes oplossing. Maar voor de praktijkberekening van de geoïde mag (2.5) worden gebruikt. Aangezien de stoorpotentiaal T voldoet aan Laplace vergelijking is het een harmonische functie en kan de geoïdehoogte N worden geschreven als een sferisch harmonische reeks (zie Heiskanen&Moritz, 1967)

$$N(\varphi, \lambda) = R \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \overline{\Delta C}_{nm} \overline{Y}_{nm}(\varphi, \lambda). \quad (2.6)$$

Dit wordt ook spectrale uitdrukking genoemd. In bijlage A.1 worden alle vergelijkingen en afleidingen gegeven die met spectrale uitdrukkingen van zwaartekrachtgrootheden te maken hebben. Het belangrijkste dat daaruit volgt is weergegeven in het schema in figuur 2.2. Daarin wordt de equivalentie aangegeven van het ruimtedomein en het spectrale bolfunctiedomein. Het berekenen van geoïdehoogten uit zwaartekrachtanomalieën met Stokes integraal (een convolutie) is precies hetzelfde als het berekenen van spectrale coëfficiënten van de zwaartekrachtanomalieën, vervolgens deze coëfficiënten vermenigvuldigen met de eigenwaarde $\frac{R}{\gamma(n-1)}$, en daarna deze geoïdecoëfficiënten terugtransformeren naar het ruimtedomein. Het is belangrijk op te merken dat de transformatie van de éne ruimte naar de andere ruimte alleen opgaat wanneer de functiewaarden globaal (wereldwijd) zijn gegeven. De orthogonaliteitsrelaties van bolfuncties (A.3) die ten grondslag liggen aan de transformatie naar het spectrale domein en andersom gelden alleen wanneer over de gehele bol wordt geïntegreerd. Ook alleen dan zijn het toepassen van de integraal in het ruimtedomein en het vermenigvuldigen met de eigenwaarde in het spectrum gelijk.



Figuur 2.2 Schema met transformatie in ruimte domein (links) en spectraal domein (rechts).

2.2 Combinatieoplossing

In werkelijkheid is Δg niet beschikbaar als functie over de gehele aarde. Stokes integraal (2.5) kan niet zondermeer worden toegepast. Ook kunnen Δg_{nm} (en daarmee dus $\overline{\Delta C}_{nm}$) niet worden bepaald omdat ook daarvoor globale bedekking het zwaartekracht-data nodig is. Met behulp van satellietmetingen kunnen geopotentialcoëfficiënten tot een bepaalde maximale graad en orde bepaald worden. Gecombineerd met zwaartekrachtmetingen op het aardoppervlak kunnen momenteel modellen tot graad en orde 360 worden bepaald. Een beschrijving van deze data en de bepaling van geopotentialmodellen wordt gegeven in hoofdstuk 5. De geopotentialcoëfficiënten beschrijven het laagfrequente deel van de zwaartekracht. De kleinste golflengte die voorkomt is (met de vuistregel $\lambda = \frac{2\pi R}{n}$) ongeveer 110 km. Deze langgolvlige data hebben wel een globale bedekking.

Naast de geopotentialmodellen (coëfficiëntensets) is van veel gebieden op aarde lokale zwaartekrachtinformatie beschikbaar. Deze data zijn beschikbaar uit metingen voor orthometrische correcties aan waterpasmetingen, voor geofysische doeleinden of geoïdeberekening. Vaak zijn de oorspronkelijke puntwaarden omgerekend tot gemiddelde blokanomalieën voor gebieden van $10 \times 10 \text{ km}^2$ of $5 \times 5 \text{ km}^2$. Het gebied waar deze data beschikbaar zijn varieert van één tot enkele graden ($1^\circ \approx 111 \text{ km}$) afstand tot de geoïdeberekeningspunten. In paragraaf 2.1 is al aangegeven dat vooral de zwaartekrancht-anomalieën dichtbij het berekeningspunt een grote bijdrage geven aan de geoïde. Het is dus belangrijk om voor een gebied rondom de geoïdeberekeningspunten gedetailleerde en nauwkeurige data beschikbaar te hebben.

Doorgaans zijn de hierboven genoemde datasets (geopotentialcoëfficiënten tot graad en orde 360, en lokale puntwaarden of gemiddelde blokwaarden) beschikbaar en moet daarmee de geoïde zo goed mogelijk berekend worden. Voor de data die beschikbaar zijn voor de berekening van de geoïde voor Nederland wordt verwezen naar de hoofdstukken 3 en 5.

Deze twee datasets worden gecombineerd gebruikt voor de geoïdeberekening. De doorgaans toegepaste methode van geoïdeberekening uit deze twee datasets wordt combinatieoplossing (Rapp&Rummel, 1975) of 'remove-restore'-techniek genoemd. Eerst wordt de bijdrage van de geopotentialcoëfficiënten bepaald

$$N_1^A(P) = R \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{m=-n}^n \overline{\Delta C}_{nm} \bar{Y}_{nm}(P), \quad (2.7)$$

waarin N_{max} de maximale graad en orde van het gebruikte model is (meestal 180 of 360). Hetzelfde kan bereikt worden door overal op aarde zwaartekrancht-anomalieën te berekenen uit $\overline{\Delta C}_{nm}$ met behulp van (A.11) en vervolgens de Stokes integraalformule (2.5) toe te passen. In (2.7) wordt de spectrale transformatie $\frac{R}{\gamma(n-1)}$ toegepast die volledig equivalent is (zie paragraaf 2.1).

De tweede dataset, met lokaal gemeten zwaartekrancht-anomalieën, kan ook worden gebruikt om middels de Stokes integraal de geoïdebijdrage daarvan uit te rekenen. Deze

dataset bevat het langgolvlige deel dat ook door de geopotentialcoëfficiënten Δg_{nm} wordt beschreven. Dit deel is al meegenomen bij de bepaling van N_1^A en dient hier te worden uitgesloten. Dit deel is

$$\Delta g^{ggm}(P) = \gamma \sum_{n=2}^{N_{max}} (n-1) \sum_{m=-n}^n \overline{\Delta C_{nm}} \overline{Y_{nm}}(P), \quad (2.8)$$

(want $\frac{GM}{r^2} = \gamma$), waar ggm de globaal-geopotentialmodelbijdrage aanduidt. De bijdrage aan de geöïde van het residu van de lokale zwaartekrachtdata wordt dan

$$N_2^A(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma_o} St(\psi) (\Delta g - \Delta g^{ggm}) d\sigma. \quad (2.9)$$

Hierin is het integratiegebied beperkt tot het zogenoemde binnengebied σ_o . Dit is het gebied waar de lokale zwaartekrachtdata gegeven zijn. Meestal wordt gebruik gemaakt van een cirkelvormig binnengebied rondom het geöïdeberekeningspunt. De totale geöïde wordt dan

$$N^A(P) = N_1^A(P) + N_2^A(P). \quad (2.10)$$

Deze manier om de twee datasets te combineren wordt methode A genoemd (Rapp&Rummel, 1975). Er is ook een methode B die precies hetzelfde resultaat oplevert als methode A. Deze is beschreven in (Molodenskii e.a., 1962, p.147). Hierbij worden de data niet gesplitst in het spectrale domein ($n \leq N_{max}$ en $n > N_{max}$) zoals bij methode A, maar gesplitst in het ruimtedomein (op de bol) naar binnengebied en het resterende buitengebied. De informatie uit de geopotentialcoëfficiënten Δg_{nm} wordt niet over de gehele aarde gebruikt, maar alleen in het buitengebied. De geöïdebijdrage daarvan wordt dan

$$N_1^B(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma-\sigma_o} St(\psi) \Delta g^{ggm} d\sigma. \quad (2.11)$$

waarbij σ_o cirkelvormig wordt verondersteld. Door nu te definiëren

$$St_1(\psi) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \psi \leq \psi_o \\ St(\psi) & \psi_o < \psi \leq \pi \end{cases}, \quad (2.12)$$

ontstaat

$$N_1^B(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} St_1(\psi) \Delta g^{ggm} d\sigma. \quad (2.13)$$

$St_1(\psi)$ kan net als $St(\psi)$ (zie (2.4)) worden geschreven als Legendrereeks

$$St_1(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} Q_n(\psi_o) P_n(\cos \psi), \quad (2.14)$$

waarbij

$$Q_n(\psi_o) = \int_{\psi=0}^{\pi} St_1(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi = \int_{\psi=\psi_o}^{\pi} St(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi. \quad (2.15)$$

Merk op dat de sommatie in (2.14) over n bij 0 begint, terwijl de spectrale coëfficiënten in Stokes functie (2.4) voor de graden 0 en 1 gelijk aan nul zijn, waardoor de sommatie bij 2 begint. De $Q_n(\psi_o)$ -coëfficiënten worden afbreek-coëfficiënten genoemd (Molodenskii e.a., 1962) en ook vaak Molodenskii-coëfficiënten. In (Paul, 1973) wordt beschreven hoe de Molodenskii-coëfficiënten iteratief kunnen worden berekend. Omdat de integratie in (2.13) over de gehele bol wordt uitgevoerd, mag deze integratieoperatie ook in het spectraal domein worden uitgedrukt, wat zich laat vertalen in

$$\begin{aligned} N_1^B(P) &= \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{N_{max}} Q_n(\psi_o) \Delta g_n \\ &= R \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{n-1}{2} Q_n(\psi_o) \right) \sum_{m=-n}^n \overline{\Delta C_{nm}} \overline{Y_{nm}}(P). \end{aligned} \quad (2.16)$$

De som over n begint hier weer bij 2 omdat de geopotentialcoëfficiënten van graad 0 en 1 de waarde nul hebben. De binnengebiedbijdrage door de gegeven data in het binnengebied wordt nu

$$N_2^B(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma_o} St(\psi) \Delta g \, d\sigma. \quad (2.17)$$

Het langgolvlige deel van de zwaartekracht dat wordt beschreven door het geopotential model wordt nu niet van de data afgehaald omdat de bijdrage daarvan in het binnengebied nog niet in rekening is genomen. Er geldt

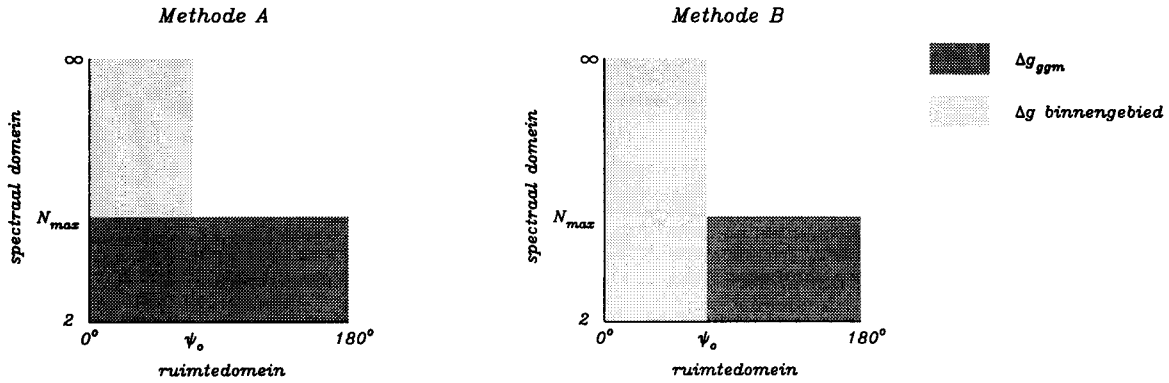
$$N(P) = N_1^A(P) + N_2^A(P) = N_1^B(P) + N_2^B(P). \quad (2.18)$$

Het bewijs hiervoor zal worden gegeven in paragraaf 2.6. Methode A is handig voor het daadwerkelijk uitvoeren van een berekening, terwijl methode B veel gemakkelijker is bij het bepalen van de fout in de geoïde. Methode A kan worden beschouwd als een rekenmethode of evaluatiemethode van het probleem dat elegant beschreven wordt door de methode B formules. Figuur 2.3 geeft schematisch weer hoe bij de twee methoden A en B de beschikbare data worden gebruikt. Dit geldt als alle beschikbare Δg -informatie correct is. Ook hierop zal verder worden ingegaan in paragraaf 2.6.

De combinatieoplossing maakt gebruik van de voordelen van de beide datasets, globaal geopotential model en lokale zwaartekranchanomalieëndataset, en minimaliseert de nadelen van beide datasets. Het geopotentialmodel levert de mondiale bedekking met zwaartekranchanomalieën die noodzakelijk is voor toepassing van Stokes integraal. Het ontbreken van hoogfrequente informatie wordt in het belangrijkste gebied vlakbij het geoïdeberekeningspunt verholpen door de lokale zwaartekrachtdataset. Door de geoïde te berekenen uit de twee gecombineerde datasets wordt een veel betere geoïde verkregen dan uit één van de twee datasets apart mogelijk is.

2.3 Berekening van N_2

De zwaartekrachtinformatie die is gegeven in het binnengebied is geen continue functie zoals vereist in (2.9) of (2.17). Ze is beschikbaar als puntwaarde op de plaats van



Figuur 2.3 Gecombineerd gebruik van de twee beschikbare datasets bij de combinatie-methoden A en B.

de metingen of als gemiddelde zwaartekrachtwaarde voor gebieden van bijvoorbeeld $5 \times 5 \text{ km}^2$, welke blokwaarden worden genoemd. De continue Stokes integraal moet hieraan wordt aangepast, zodat een numerieke evaluatie kan worden uitgevoerd. De numerieke evaluatie van (2.9) kan worden uitgevoerd middels numerieke integratie. Hiervoor zijn verschillende methoden mogelijk, waarvan er hier twee zullen worden behandeld. Naast de mogelijkheid van numerieke integratie kan de evaluatie van (2.9) of (2.17) ook worden uitgevoerd met kleinste-kwadraten collocatie. Deze methode, die voor het grootste deel steunt op werk van Krarup (1969) en Moritz (1980a), is een zeer algemene schattingstechniek voor stoorpotentiaal gerelateerde grootheden, en kan ook worden toegepast voor de berekening van de geoïde uit zwaartekrancht-anomalieën. In deze paragraaf zullen de drie genoemde evaluatiemethoden worden behandeld en vergeleken.

2.3.1 Numerieke integratie over blokwaarden

In het binnengebied zijn meestal gemiddelde zwaartekrachtwaarden beschikbaar voor gebieden begrensd door lijnen van meridianen en parallellen, bijvoorbeeld $3'$ intervallen in noord-zuid richting en $5'$ intervallen in oost-west richting ($\approx 5.6 \times 5.6 \text{ km}^2$ in West-Europa). De Stokes integraal wordt dan aangepast zodat een numerieke integratie mogelijk wordt (Bomford, 1970, p.432; Heiskanen&Moritz, 1967, p.118):

$$\begin{aligned}
 N(P) &= \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{i=1}^I \overline{\Delta g}_i \int_{\lambda=\lambda_Q-\frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_Q+\frac{\Delta\lambda}{2}} \int_{\varphi=\varphi_Q-\frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_Q+\frac{\Delta\varphi}{2}} St(\psi_{PQ}) \cos \varphi_Q d\lambda_Q d\varphi_Q \quad (2.19) \\
 &= \sum_{i=1}^I w_i^{St} \overline{\Delta g}_i,
 \end{aligned}$$

waarin Q het middelpunt van blokgebied i voorstelt, en w_i^{St} Stokes gewichten worden genoemd, en welke afhangen van de onderlinge positie van P en Q .

De I blokgebieden waarover de sommatie wordt uitgevoerd bedekken samen het binnengebied voor het desbetreffende geoïdeberekeningspunt. De integratie over Stokes functie om de Stokes gewichten te bepalen kan niet analytisch worden uitgevoerd. Een mogelijkheid is om de gewichten numeriek te berekenen. Het integratiegebied (hier tevens blokgebied waarvoor een constante zwaartekrachtwaarde is gegeven) wordt opgesplitst in subblokken, waarna het gemiddelde van de Stokes functiewaarden voor de middelpunten van de subblokken wordt berekend. Hoe groter het aantal subblokken is waarin het blokgebied wordt verdeeld, hoe dichter deze numerieke waarde de echte integratie w_i^{St} zal benaderen. Deze numerieke integratie techniek staat bekend als *extended midpoint rule* (Press e.a., 1992). Er zijn verscheidene andere numerieke integratie technieken voor handen, die soms efficiënter zijn dan de genoemde *extended midpoint rule*. De Newton formules bijvoorbeeld gebruiken verschillende gewichten per subblok, waardoor doorgaans minder subblokken nodig zijn. Bij Gauss-numerieke integratie worden niet alleen de gewichten arbitrair gekozen, maar mogen ook de plaatsen van de integratiepunten (hier de grootte van de subblokken) vrij worden gekozen (Press e.a., 1992). Vanwege haar eenvoud en de uiteindelijk te vinden oplossing voor de berekening van de Stokes gewichten, gaan we hier alleen in op de *extended midpoint rule* (voortgezette middelpunt techniek).

In tabel 2.1 staat aangegeven hoe de Stokes gewichten moeten worden berekend met de voortgezette middelpunt techniek met N^2 knooppunten (*nodes*) om daarin een bepaalde maximale fout toe te staan. Het aantal subblokken dat nodig is voor de Stokes gewicht berekening hangt af van de relatieve afstand tussen het geoïdeberekeningspunt en het midden van het zwaartekrachtblok. De relatieve afstand is de werkelijke afstand gedeeld door de blokgrootte $\frac{\psi_{PQ}}{\Delta}$ (Q is het middelpunt van het blokgebied, P is het geoïdeberekeningspunt en Δ de (gemiddelde) zijdelengte van het blokgebied). Bij een bepaalde acceptabele relatieve fout in het Stokes gewicht van bijvoorbeeld $1 \cdot 10^{-3}$ kan in de betreffende rij van tabel 2.1 worden afgelezen hoeveel subblokken nodig zijn vanaf een bepaalde relatieve afstand in blokgrootte. In dit geval moeten er voor het blok waarin het geoïdeberekeningspunt ligt 512^2 subblokken worden gebruikt, voor directe buurblokken waarvan het middelpunt op 1 keer de blokzijde van het geoïdeberekeningspunt ligt moeten 8^2 subblokken worden gebruikt. Voor zwaartekrachtblokken waarvan het midden 1 tot 2 keer de blokzijde van het berekeningspunt ligt worden 8^2 subblokken gebruikt, voor zwaartekrachtblokken waarvan het midden 2 tot 3 1/2 keer de blokzijde van het berekeningspunt ligt worden 4^2 subblokken gebruikt, en zo verder. Voor blokken waarvan het middelpunt verder weg ligt dan 7 keer de blokzijde is nog maar 1 subblok nodig.

De te accepteren fout hangt af van het doel van de berekening, maar ook en vooral van de signaalfrequentieën -amplitude waarmee wordt gewerkt. Om bij een combinatieoplossing geoïdeberekening via methode A, met een binnengebied van enkele graden, een fout van sub-mm orde te maken is de maximaal te accepteren fout $1 \cdot 10^{-4}$.

Uit tabel 2.1 volgt dat voor een preciese berekening van de gewichten (bijvoorbeeld $\varepsilon \leq 1 \cdot 10^{-4}$) zeer veel subblokken nodig zouden zijn voor blokgebieden die dichtbij

Tabel 2.1 Aantal subblokken (knooppunten/nodes) vanaf een relatieve afstand $\frac{\psi_{PQ}}{\Delta}$, om een maximale relatieve fout ε in het Stokes gewicht w_i^{St} te maken. P is het geoïdeberekeningspunt, Q is het middelpunt van blokgebied i , Δ is de gemiddelde blokzijdelengte.

maximaal te accepteren fout ε	aantal subblokken (nodes) N^2 per blok												
	4096^2	2048^2	1024^2	512^2	256^2	128^2	64^2	32^2	16^2	8^2	4^2	2^2	1
$5 \cdot 10^{-3}$						0					1	2	3
$1 \cdot 10^{-3}$				0						1	2	$3\frac{1}{2}$	7
$5 \cdot 10^{-4}$			0						1	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	5	9
$1 \cdot 10^{-4}$	0							1	$1\frac{1}{2}$	3	6	10	20
$5 \cdot 10^{-5}$							1	$1\frac{1}{2}$	2	4	7	14	28

het berekeningspunt liggen of waar het berekeningspunt in ligt. Dit proces vraagt veel rekentijd zodat naar een andere oplossing is gezocht. We splitsen Stokes functie (2.3) op in twee delen welke apart worden geïntegreerd

$$\begin{aligned}
 w_i^{St} = & \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\lambda=\lambda_Q-\frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_Q+\frac{\Delta\lambda}{2}} \int_{\varphi=\varphi_Q-\frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_Q+\frac{\Delta\varphi}{2}} \frac{1}{\sin(\psi/2)} \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda \\
 & - \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\lambda=\lambda_Q-\frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_Q+\frac{\Delta\lambda}{2}} \int_{\varphi=\varphi_Q-\frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_Q+\frac{\Delta\varphi}{2}} \left(3 \cos \psi \ln \left(\sin(\psi/2) \right) + \sin^2(\psi/2) \right) \\
 & \quad \quad \quad + 6 \sin(\psi/2) - 1 + 5 \cos \psi \Big) \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda .
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Het tweede deel aan de rechterkant met de meeste termen van de Stokes functie (2.3) heeft een glad verloop. Ook de eerste en tweede afgeleide functies ervan verlopen glad en hebben geen extreme waarden. Daardoor is dit deel eenvoudig numeriek te integreren. In bijvoorbeeld 2^2 integratiestappen (subblokken) wordt al een zeer hoge precisie bereikt (beter dan $1 \cdot 10^{-4}$). Het eerste deel met $\frac{1}{\sin(\psi/2)}$ binnen de integraal heeft voor de eerste en tweede afgeleide functies wel extreme waarden, vooral voor kleine ψ . Deze extreme waarden zorgen voor een langzame convergentie in het numerieke integratieproces waardoor een groot aantal integratiestappen noodzakelijk is (zie tabel 2.1). Wanneer deze term nu wordt geschreven in plattevlak benadering, waarbij gebruik gemaakt wordt van

$$x = (\lambda_Q - \lambda_P) \cos \varphi_Q \quad \text{en} \quad y = (\varphi_Q - \varphi_P), \tag{2.21}$$

en $\frac{1}{\sin(\psi/2)}$ wordt benaderd door $2/\psi \approx 2/\sqrt{x^2 + y^2}$, wat is toegestaan voor kleine

waarden voor ψ , dan ontstaat voor de Stokes gewichten de uitdrukking

$$\begin{aligned}
 w_i^{St} = & \frac{R}{4\pi\gamma} 2 \int_{\lambda=\lambda_Q-\frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_Q+\frac{\Delta\lambda}{2}} \int_{\varphi=\varphi_Q-\frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_Q+\frac{\Delta\varphi}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \\
 & - \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(3 \cos \psi \ln \left(\sin(\psi/2) \right) + \sin^2(\psi/2) \right) + \\
 & 6 \sin(\psi/2) - 1 + 5 \cos \psi \left) \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} .
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Voor het integraaldeel hiervan is de analytische oplossing bekend, zodat het Stokes gewicht kan worden uitgerekend met

$$\begin{aligned}
 w_i^{St} = & \frac{R}{4\pi\gamma} 2 \left[\int x \ln(y + \sqrt{x^2+y^2}) + y \ln(x + \sqrt{x^2+y^2}) \right. \\
 & \left. \int_{y=\varphi_Q-\frac{\Delta\varphi}{2}-\varphi_P}^{\varphi_Q+\frac{\Delta\varphi}{2}-\varphi_P} \int_{x=(\lambda_Q-\frac{\Delta\lambda}{2}-\lambda_P)\cos\varphi_Q}^{(\lambda_Q+\frac{\Delta\lambda}{2}-\lambda_P)\cos\varphi_Q} \right] \\
 & - \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(3 \cos \psi \ln \left(\sin(\psi/2) \right) + \sin^2(\psi/2) \right) + \\
 & 6 \sin(\psi/2) - 1 + 5 \cos \psi \left) \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} ,
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

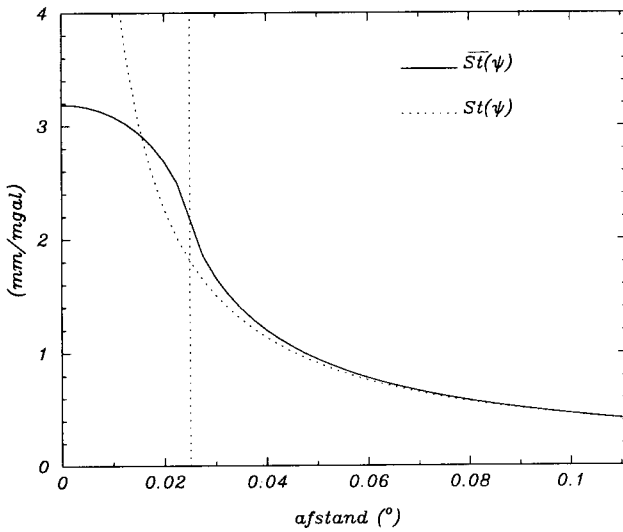
waarin φ en λ in radialen zijn, en $\Delta x = \Delta\lambda \cos \varphi_Q$ en $\Delta y = \Delta\varphi$.

Voor afstanden tot 50-100 km wordt de relatieve fout in de Stokes gewichten w_i^{St} kleiner dan 10^{-4} gehouden. Als alle termen behalve de eerste in Stokes functie worden verwaarloosd, zoals wordt gedaan in platte-vlak FFT-berekeningen, kunnen fouten van 1-8% worden gemaakt voor afstanden van 10-100 km. Voor een uitvoerige beschrijving en discussie van de berekening van de Stokes gewichten, zie (De Min, 1994).

Figuur 2.4 laat zien hoe de geïntegreerde Stokes functie over blokken er uit ziet. Duidelijk is te zien dat rond de afstand $\psi_{PQ} = \frac{\Delta}{2}$ (hier 0.025°) een zeer snelle verandering van het Stokes gewicht plaats vindt. Deze situatie doet zich voor als het geoïdeberekeningspunt op de rand van het blokgebied ligt. Omdat bij de hier behandelde berekeningsmethode voor N_2 de geoïdeberekeningspunten P in het midden van het blokgebied gekozen worden levert het geen probleem op. In andere gevallen kan het, afhankelijk van het zwaartekrachtssignaal, nodig zijn om kleinere blokgebieden te gebruiken.

2.3.2 Numerieke integratie over punten

Bij deze vorm van numerieke integratie om de geoïdebijdrage N_2 van de residu zwaartekrancht-anomalieën in het binnengebied te berekenen, wordt gebruik gemaakt van een



Figuur 2.4 De Stokes gewichten w_ψ^{St} uit de geïntegreerde Stokes functie $\overline{St}(\psi)$ voor vierkante blokgebieden van 0.05° ($\approx 5.6\text{ km}$), en uit de gewone Stokes functie (in mm/mgal). De verticale lijn geeft de rand van het centrale blok aan.

vergelijkbare formule als (2.19)

$$N(P) = \sum_{i=1}^I w_i^{St} \Delta g_i . \quad (2.24)$$

Er wordt nu niet gesommeerd over gemiddelde blokwaarden $\overline{\Delta g}$ maar over de gegeven puntwaarden Δg . De Stokes gewichten w_i^{St} moeten daaraan worden aangepast. Aan elk zwaartekrachtspunt moet een bijbehorende oppervlakte σ_i worden toegekend en de Stokes functie moet worden geïntegreerd over dat gebied. Alle oppervlaktes σ_i bij elkaar dienen weer precies het binnengebied te bedekken. Rummel (1982) heeft een methode bedacht waarbij de grootte van de oppervlaktes wordt berekend uit een mathematische triangulatie tussen de zwaartekrachtspunten. Het totale oppervlak wordt berekend van alle driehoeken waarin een bepaald punt i meedoet. De som van deze oppervlaktes wordt gedeeld door drie en dit wordt toegekend aan punt i . Doet men dit voor alle punten in het binnengebied, dan levert de som van deze oppervlaktes per punt precies de totale binnengebiedoppervlakte op. Een voorbeeld van een mathematische triangulatie wordt gegeven in hoofdstuk 6, bladzijde 132.

Het driehoeksnet kan op verschillende manieren worden geconstrueerd. Burger (1993) behandelt enkele hiervan, en kiest uiteindelijk voor de Delauney-triangulatie, vanwege de eigenschap dat de lengte van de verbindingslijnen wordt geminimaliseerd. Dit betekent tegelijkertijd dat de vorm van de driehoeken zo veel mogelijk gelijkzijdig wordt. Bij deze geoïdeberekeningsmethode met triangulatiernetwerk, wordt niet precies een gebied bepaald waarvoor de zwaartekrachtsanomalie Δg_i geldt, maar wordt alleen bepaald hoe groot de oppervlakte van het bijbehorende gebied is. Dit betekent dat de Stokes functie niet kan worden geïntegreerd over een vast gebied. In 2.3.1 is getoond dat het nodig is om de Stokes functie te integreren over het betreffende gebied, omdat anders

een aanzienlijke fout wordt gemaakt. Daarom moet hier een aanname worden gedaan over de vorm van het gebied dat hoort bij een punt i . Er kan bijvoorbeeld worden gekozen voor een cirkelvormig gebied of een rechthoekig gebied. Wordt gekozen voor een cirkelvormig gebied dan kan de geïntegreerde Stokes functie worden gebruikt die wordt beschreven door

$$\overline{St}(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \beta_n P_n(\cos \psi), \quad (2.25)$$

waarin de β_n -coëfficiënten de middeling over een cirkelvormig gebied weergeven (zie bijlage B). Deze geïntegreerde Stokes functie lijkt veel op die uit figuur 2.4. Het Stokes gewicht wordt dan

$$w_i^{St} = \frac{R}{4\pi\gamma} \overline{St}(\psi_{Pi}) \sigma_i. \quad (2.26)$$

(Nogmaals wordt opgemerkt dat het Stokes gewicht dus ook van het geoïdeberekeningspunt P afhangt.) Wordt voor een vierkant gebied gekozen dan kan de oplossing voor de Stokes gewichten uit 2.3.1 worden gebruikt. Daarbij wordt dan een blokzijde Δx en Δy genomen zodanig dat $\Delta x \Delta y = \sigma_i$.

Bij deze methode zullen de geoïdeberekeningspunten niet samen vallen met de gegeven zwaartekrachtenpunten, omdat deze laatste onregelmatig verspreid zullen liggen. De geoïdeberekeningspunten zullen doorgaans op een regelmatig grid worden gekozen. Hierdoor kan zich gemakkelijk de situatie voordoen dat de afstand tussen het berekeningspunt en het gegeven zwaartekrachtenpunt ongeveer gelijk is aan de helft van de blokzijde van een vierkant, of de straal van een cirkel, die past bij de oppervlakte die hoort bij dit zwaartekrachtenpunt. Zoals kan worden gezien in figuur 2.4 verandert de geïntegreerde Stokes functie zeer snel voor deze afstand, zodat een onbetrouwbaar Stokes gewicht wordt verkregen. Zeker in het geval van de mathematische triangulatie, waarbij het bijbehorende gebied niet bepaald is, en waarbij dus niet bekend is of het berekeningspunt nu wel of niet in het gebied behorend bij i hoort of niet. Voor wat grotere afstanden zal dit probleem zich niet manifesteren, zodat de fout die wordt gemaakt een hoogfrequent karakter zal hebben.

Omdat de data een onregelmatige ligging hebben zullen de Stokes gewichten voor ieder geoïdeberekeningspunt anders zijn en kan geen gebruik worden gemaakt van efficiënte rekenalgorithmen. Een directe sommatie zal moeten worden uitgevoerd.

2.3.3 Collocatie

(Kleinste-kwadraten) collocatie is de derde techniek die kan worden gebruikt voor het berekenen van de binnengebiedbijdrage aan de geoïde. In deze paragraaf zullen we kort ingaan op de formules die van belang zijn. Enkele theoretische beschouwingen betreffende collocatie komen in bijlage A.2 aan de orde. We richten ons hier vooral op de techniek om collocatie te gebruiken. Voor een uitgebreide beschrijving van de methode en zijn eigenschappen wordt verwezen naar (Krarup, 1969) en (Moritz, 1980a).

Kleinste-kwadraten collocatie is een methode om uit gegeven zwaartekrachtveldafhankelijke informatie allerlei andere zwaartekrachtveldafhankelijke grootheden te berekenen. De collocatieformule, in matrixnotatie, is

$$\begin{pmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \\ \vdots \\ \hat{s}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{s_1x_1} & C_{s_1x_2} & \cdots & C_{s_1x_m} \\ C_{s_2x_1} & C_{s_2x_2} & \cdots & C_{s_2x_m} \\ C_{s_3x_1} & C_{s_3x_2} & \cdots & C_{s_3x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{s_nx_1} & C_{s_nx_2} & \cdots & C_{s_nx_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{x_1x_1} & C_{x_1x_2} & \cdots & C_{x_1x_m} \\ C_{x_2x_1} & C_{x_2x_2} & \cdots & C_{x_2x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{x_mx_1} & C_{x_mx_2} & \cdots & C_{x_mx_m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Hierin zijn \hat{s} de functiewaarden die moeten worden uitgerekend en x_i de gemeten functiewaarden. De te bepalen en gemeten functiewaarden kunnen allerlei afgeleide grootheden van de aardse zwaartekracht potentiaal zijn, zoals zwaartekrachtanomalieën, geoidhoogten, schietloodafwijkingen, etc. De matrixcoëfficiënten C_{sx} en C_{xx} worden berekend uit (kruis)signaalcovariantiefuncties. Er wordt één autocovariantiemodel $C(s)$ gekozen, voor bijvoorbeeld zwaartekrachtanomalieën, waaruit de overige auto- en kruiscovariantiefuncties kunnen worden bepaald middels signaalcovariantievoortplanting (Moritz, 1980a, p.86). Als een lineaire (of gelineariseerde) relatie bekend is tussen twee grootheden, kan deze signaalcovariantievoortplanting worden uitgevoerd. nemen we als voorbeeld (2.5), dan geldt $C^{Ng}(\psi) = S(C^{gg}(\psi))$ (zie ook A.2). Hierin geeft S de Stokes integraal aan, de lineaire operator die zwaartekracht omrekent naar geoidhoogten. De verkorte notatie voor de collocatieformule (2.27) is

$$\hat{s}(P) = C_{P_i}^{sx} (C_{i_i'}^{xx})^{-1} x_i . \quad (2.28)$$

Collocatie is een flexibele en tevens optimale methode om op basis van alle beschikbare informatie, bijvoorbeeld, de geoid uit te rekenen. Moritz (1980a) laat zien dat deze methode enkele belangrijke eigenschappen heeft. De oplossing zorgt voor reproductie van de data (in de oorspronkelijke meetpunten), de berekende verschillende functionalen van T , \hat{s} , zijn onderling consistent en beschrijven hetzelfde gravitatieveld. Daarnaast hebben de berekende waarden \hat{s} een minimale variantie (kleinste-kwadraten). Ze zijn de best mogelijke lineaire schatting, als de gebruikte covariantiefunctie de juiste is. De berekende (a posteriori) variantie wordt beschreven door

$$\sigma_{\hat{s}}^2 = C^{ss}(0) - C_{P_i}^{sx} (C_{i_i'}^{xx})^{-1} C_{i_i'P}^{xs} . \quad (2.29)$$

De berekende variantie hangt niet van de gegeven meetwaarden zelf af, alleen van hun posities en de covariantiefunctie.

De covariantiefuncties spelen een belangrijke en centrale rol in collocatie. De covariantiefunctie wordt beschreven als

$$C(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n P_n(\cos \psi) , \quad (2.30)$$

waarin c_n de signaalgraadvarianties zijn. Deze covariantiefunctie is homogeen en isotroop, dat wil zeggen dat de functie voor ieder punt op aarde geldt, en dat de correlaties

niet richtingsafhankelijk zijn. In bijlage A.2 wordt nader ingegaan op transformaties van deze covariantiefunctie.

In deze bijlage wordt ook op de wiskundige achtergrond van collocatie, en een mogelijke interpretatie daarvan ingegaan. Naast de wiskundige uitleg in bijlage A.2 kan collocatie ook op een mee praktische en inzichtelijke manier worden gezien, door de methode te beschouwen als uitbreiding van de formule voor kleinste-kwadraten predictie. Deze formule is gelijk aan (2.27), waarbij slechts één soort waarnemingen is gedaan en ook alleen dezelfde soort grootheid weer wordt geschat. Krarup (1969) laat zien dat als nu niet dezelfde grootheid, maar een andere grootheid moet worden geschat, de collocatieformule wordt gevonden. In dit geval vindt alleen signaalcovariantievoortplanting plaats op de matrixelementen in de eerste matrix. Kleinste-kwadraten collocatie kan dan worden beschouwd als een methode waarbij twee stappen automatisch in één keer worden gemaakt. Bij de berekening van geoïdehoogten uit zwaartekranchanomalieën kunnen deze twee stappen worden beschreven als: kleinste-kwadraten predictie van een continue functie van zwaartekranchanomalieën op basis van de gegeven zwaartekracht metingen, met als tweede stap daarna een transformatie van de voorspelde functie met Stokes integraal naar geoïdehoogten. Hierop zal straks nog in detail worden teruggekomen.

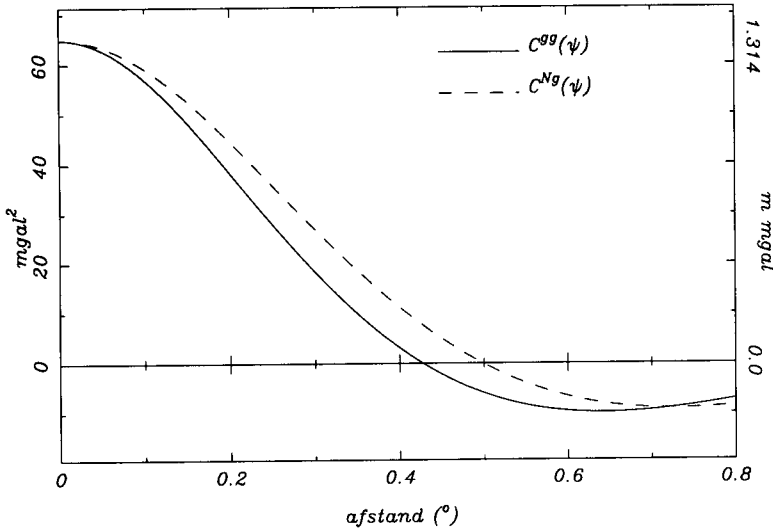
In de praktijk van de geoïdeberekening wordt de collocatieformule aangepast. Collocatie wordt namelijk alleen gebruikt voor de berekening van de geoïdebijdrage uit de residu zwaartekranchanomalieën in het binnengebied, N_2 . De covariantiefunctie moet dan worden aangepast aan deze residu data. Het signaal tot aan graad N_{max} is verwijderd, dus zou het Tscherning-Rapp model kunnen worden gebruikt vanaf graad $N_{max} + 1$. Omdat echter in een lokaal gebied wordt gewerkt, kan het zijn dat de mondiaal gemiddelde parameters van (A.23) niet precies gelden voor het lokale gebied. Bijvoorbeeld kan een Tscherning-Rapp model worden gebruikt waarbij de parameters A, B en s zijn aangepast voor het betreffende gebied. Bovendien is niet al het signaal beneden graad N_{max} werkelijk afgetrokken. De coëfficiënten van het geopotentialmodel hebben een bepaalde onzekerheid die wordt beschreven door de standaardafwijking $\sigma_{\bar{C}_{nm}}$ van de geopotentialcoëfficiënten \bar{C}_{nm} . Hieruit kunnen de foutgraadvarianties ε_n voor zwaartekranchanomalieën worden berekend middels

$$\varepsilon_n = \gamma^2 (n-1)^2 \sum_{m=-n}^n (\sigma_{\bar{C}_{nm}})^2. \quad (2.31)$$

Deze foutgraadvarianties zijn een goede maat voor de hoeveelheid energie die nog in de residu zwaartekranchanomalieën aanwezig is op de lage graden $n \leq N_{max}$. De covariantiefunctie voor residu zwaartekranchanomalieën in een lokaal gebied kan dan worden beschreven door (Knudsen, 1987)

$$C(\psi) = \alpha \sum_{n=2}^{N_{max}} \varepsilon_n P_n(\cos \psi) + \sum_{n=N_{max}+1}^{\infty} s^{n+2} \frac{A(n-1)}{(n-2)(n+B)} P_n(\cos \psi). \quad (2.32)$$

De parameter α ($0 \leq \alpha \leq 1$) kan samen met A, B en s worden gebruikt om een zo goed mogelijke beschrijving van de covariantiefuncties van de residu zwaartekranchanomalieën in het binnengebied te verkrijgen. In paragraaf 2.4 zal dit worden bestudeerd.



Figuur 2.5 Covariantiefuncties $C^{gg}(\psi)$ en $C^{Ng}(\psi)$, bepaald op basis van de graadvarianties uit figuur 2.9.

De waarden die veel worden gebruikt voor $n > N_{max}$ zijn die van het Tscherning-Rapp model, zoals genoemd in bijlage A.2.

De collocatieformule om geöidehoogten uit residu zwaartekranchanomalieën te berekenen ziet er als volgt uit

$$N(P) = C_{Pi}^{Ng} (C_{ii'}^{gg})^{-1} \Delta g_i . \quad (2.33)$$

Hierin zijn de gebruikte auto- en kruiscovariantiefuncties beschreven door (A.17) en (A.18). Een voorbeeld van deze covariantiefuncties is gegeven in figuur 2.5.

De collocatiemethode is nu behandeld als methode om de geöidebijdrage van de residu zwaartekranchanomalieën in het binnengebied te bepalen. Maar de methode is, zoals al genoemd, veel algemener. De meest eenvoudige vorm is die van kleinste-kwadraten predictie, waarbij helemaal geen transformatie plaats vindt. Een andere vorm is die waarbij gemiddelde blokwaarden worden uitgerekend. Hierop zal nog worden ingegaan in hoofdstuk 4. Voor de volledigheid wordt nog opgemerkt dat als de metingen een bepaalde meetruis hebben, welke wordt beschreven door een functie $D(\psi)$ of een matrix $D_{ii'}$, dat deze kan worden gebruikt in de kleinste-kwadraten collocatieformule middels

$$\hat{s}(P) = C_{Pi}^{sx} (C_{ii'}^{xx} + D_{ii'})^{-1} x_i . \quad (2.34)$$

De voorspelde functie gaat nu niet precies door de gegeven functiewaarden, maar wijkt daarvan af volgens de grootte van de opgegeven ruis. Deze methode staat bekend als *smoothing* kleinste-kwadraten collocatie.

2.3.4 Vergelijking van de drie methoden

Er zijn nu drie methoden gegeven om de binnengebiedbijdrage van residu zwaartekrachtanomalieën aan het geoïdedeel N_2 uit te rekenen

- numerieke integratie over blokken,
- numerieke integratie over punten met triangulatie,
- collocatie.

In deze paragraaf zullen de voor- en nadelen van de methoden en een vergelijking worden gegeven.

Collocatie en numerieke integratie over puntwaarden hebben als voordeel dat direct de gegeven puntwaarden kunnen worden gebruikt. Er hoeven niet eerst gemiddelde blokwaarden te worden berekend zoals bij numerieke integratie over blokken wel het geval is. Tegelijkertijd wordt bij collocatie en numerieke integratie over punten automatisch rekening gehouden met de lokale dichtheid van de data. Bij collocatie krijgen drie punten die heel dicht bij elkaar liggen evenveel gewicht als een punt dat geïsoleerd ligt. Dit gebeurt middels de waarden in de covariantiematrix van de metingen. Bij de numerieke integratie over punten zullen de driehoeken die mede worden gevormd door een geïsoleerd liggend punt groter zijn dan voor punten die dicht bij elkaar liggen (en kleine driehoeken vormen), waardoor de oppervlakte σ_i die wordt toegekend aan dit geïsoleerde punt ook groter zal zijn.

Bij collocatie dient de matrix met signaalcovariantiewaarden tussen de metingen te worden geïnverteerd. Deze berekening van de inverse matrix is vaak instabiel doordat meetpunten relatief dicht bij elkaar liggen. Verder kunnen maximaal enkele duizenden metingen tegelijk worden gebruikt in verband met de computerrekentijd. Voor een preciese geoïdeberekening zijn meer metingen nodig, zodat of slechts een klein binnengebied kan worden gebruikt (zie bijvoorbeeld Sevilla e.a., 1993), of de data moeten worden voorbereid tot bijvoorbeeld gemiddelde blokwaarden. Een belangrijk voordeel verdwijnt dus. Als een numerieke integratie wordt uitgevoerd, over blokken of over punten, dan kan alle beschikbare data worden gebruikt. Dit is voor de huidige computers geen belemmering meer.

Als de numerieke integratie over punten wordt uitgevoerd, dan kan het voorkomen dat voor punten vlakbij het berekeningspunt verkeerde Stokes gewichten worden uitgerekend. Dit introduceert hoogfrequente fouten in de geoïde, zoals al genoemd in 2.3.2. Tegelijkertijd zal de numerieke integratie over punten meer hoogfrequent signaal in de geoïde geven, omdat niet wordt gemiddeld over blokgebieden, maar de oorspronkelijke datadichtheid in stand wordt gehouden. Hierdoor blijft hoogfrequente informatie in de zwaartekrachtdata aanwezig, en kan ook de bijdrage hiervan aan de geoïde worden bepaald. Het geoïdegrid moet dan wel zo worden gekozen dat geen aliasing (zie bijvoorbeeld Lynn, 1973) optreedt. Als numerieke integratie over blokken en punten wordt vergeleken, kunnen dus altijd hoogfrequente verschillen worden verwacht. Als de blokgebieden voor numerieke integratie over blokken klein genoeg worden gekozen, zodat geen significant hoogfrequent zwaartekrachtssignaal wordt weggemiddeld, dan zullen de

verschillen worden veroorzaakt door de verkeerde Stokes gewichten van de numerieke integratie over punten.

Stel dat men de geïde wil berekenen voor meerdere punten en deze geïdeberekeningspunten liggen in het midden van de blokgebieden en vormen een grid, dan kunnen snelle evaluatiemethoden worden toegepast, die zijn gebaseerd op Fast Fourier Transforms (FFT). Deze methoden leveren een zeer grote tijdswinst op ten opzichte van directe toepassing van de numerieke integratie. Met name vroeger, maar ook nu nog, werd de platte vlak 2-D FFT veelvuldig toegepast (zie bijvoorbeeld Denker, 1988; Schwarz e.a., 1990). Hierbij zijn meerdere benaderingen nodig om met FFT te kunnen werken. Er moet een *mapping* plaats vinden van de coördinaten op de bol naar platte-vlak coördinaten waarbij een fout wordt geïntroduceerd. Verder wordt de Stokes functie vereenvoudigd omdat voor de vereenvoudigde functie een analytisch Fourier getransformeerde bekend is en voor de Stokes functie zelf niet. Door deze benaderingen wordt geen preciese oplossing verkregen. Deze methode is alleen handig om snel een indruk te verkrijgen van de relaties tussen verschillende grootheden, bijvoorbeeld voor onderwijsdoeleinden, maar is niet geschikt voor preciese geïdeberekening. Recentelijk zijn andere technieken ontwikkeld, gebaseerd op het gebruik van FFT. In (Haagmans e.a., 1993) wordt een beschrijving van een exacte evaluatiemethode met FFT gegeven, waarmee precies dezelfde resultaten worden bereikt als met de numerieke integratie (2.19). Hierin worden ook theoretische en numerieke vergelijkingen met de andere FFT-methoden gemaakt. Bij numerieke integratie over punten is zo'n efficiënte evaluatie niet mogelijk. Uit verschillende tests (Haagmans e.a., 1993; Sideris&She, 1995) blijkt dat een tijdswinst van 95%-99.6% (20 tot 250 keer zo snel) mogelijk is ten opzichte van directe numerieke integratie door het gebruik van de exacte 1D-FFT techniek.

Na deze eerste praktische vergelijking van de methoden, kan worden geconcludeerd dat numerieke integratie over blokken de beste methode is, als de blokken maar wel klein genoeg worden gekozen. Hierop wordt nog verder ingegaan in 2.5. Er moet echter ook nog worden afgevraagd of de drie methoden wel hetzelfde resultaat opleveren. Zoals al genoemd, zal dit voor numerieke integratie over blokken en punten niet het geval zijn, en is geconcludeerd dat bij voldoende kleine blokken de numerieke integratie over blokken de voorkeur heeft. Andere verschillen zullen niet optreden, omdat bij beide numerieke integraties precies over het gehele binnengebied wordt geïntegreerd.

Collocatie en numerieke integratie zullen echter niet hetzelfde resultaat opleveren. Men realiseert zich dit feit niet of nauwelijks in de geïdeberekeningspraktijk. Doorgaans wordt gekozen voor één van beide methoden op basis van praktische overwegingen, zoals de beschikbaarheid van software. Als een numerieke vergelijking wordt uitgevoerd, zie bijvoorbeeld (Denger, 1988), worden verschillen gevonden, maar de reden hiervan wordt niet genoemd. Er kan echter worden aangetoond dat de twee methoden niet dezelfde geïdebijdrage N_2 zullen geven. Dit zal nu worden gedaan, waarbij het onderscheid tussen numerieke integratie over blokken en punten kan worden genegeerd. Met numerieke integratie zal vanaf nu numerieke integratie over blokken worden bedoeld.

De collocatieformule (2.33) kan worden afgeleid als een tweestapsprocedure. De eerste stap is om op basis van de gegeven (residu) zwaartekrachtanomalieën in het binnengebied een continue zwaartekrachtfunctie te berekenen voor ieder punt op aarde, middels kleinste-kwadraten predictie.

$$\hat{\Delta}g(Q) = C_{Q_i}^{gg} (C_{i_i'}^{gg})^{-1} \Delta g_i . \quad (2.35)$$

Nu is voor ieder punt op aarde een zwaartekrachtwaarde gegeven, welke kan worden ingevuld in Stokes integraal,

$$\begin{aligned} N(P) &= \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} St(\psi_{PQ}) \hat{\Delta}g(Q) d\sigma_Q \\ &= \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} St(\psi_{PQ}) C_{Q_i}^{gg} (C_{i_i'}^{gg})^{-1} \Delta g_i d\sigma_Q \\ &= \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} St(\psi_{PQ}) C_{Q_i}^{gg} d\sigma_Q (C_{i_i'}^{gg})^{-1} \Delta g_i . \end{aligned} \quad (2.36)$$

Stokes integraal wordt over de gehele aarde σ uitgevoerd. De beide functies binnen de integraal, $St(\psi_{PQ})$ en $C^{gg}(\psi_{Q_i})$, kunnen worden geschreven als Legendre reeks (2.4) en (2.30). Deze reeksen kunnen middels het decompositietheorema (A.5) worden herschreven als sommatie van bolfuncties, waarna de orthogonaliteitsrelaties kunnen worden toegepast, omdat de integraal over de gehele aarde wordt uitgevoerd. Dan wordt verkregen

$$\begin{aligned} \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} St(\psi_{PQ}) C_{Q_i}^{gg} d\sigma_Q &= \\ \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi_{PQ}) \sum_{n'=2}^{\infty} c_{n'} P_{n'}(\cos \psi_{Q_i}) d\sigma_Q &= \\ \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{n-1} \bar{Y}_{nm}(P) \bar{Y}_{nm}(Q) \cdot \\ \sum_{n'=2}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \frac{c_{n'}}{2n'+1} \bar{Y}_{n'm'}(Q) \bar{Y}_{n'm'}(i) d\sigma_Q &= \\ \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{n-1} \cdot \\ \sum_{n'=2}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \frac{c_{n'}}{2n'+1} \bar{Y}_{nm}(P) \bar{Y}_{n'm'}(i) \int_{\sigma} \bar{Y}_{nm}(Q) \bar{Y}_{n'm'}(Q) d\sigma_Q &= \\ \frac{R}{\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{n-1} \sum_{n'=2}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \frac{c_{n'}}{2n'+1} \bar{Y}_{nm}(P) \bar{Y}_{n'm'}(i) \delta_{nn'} \delta_{mm'} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{R}{\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{n-1} \frac{c_n}{2n+1} \bar{Y}_{nm}(P) \bar{Y}_{nm}(i) = \\ & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{\gamma(n-1)} c_n P_n(\cos\psi_{Pi}) = C^{Ng}(\psi_{Pi}). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Dit is weer precies de al in bijlage A.2 genoemde signaalcovariantievoortplanting. Hiermee wordt dan verkregen

$$N(P) = C_{Pi}^{Ng} (C_{ii'}^{gg})^{-1} \Delta g_i, \quad (2.38)$$

wat weer precies de collocatieformule is.

Nog eens samengevat, kan aan collocatie de praktische interpretatie worden gegeven van

- predictie van $\Delta g(Q)$ voor alle punten Q op aarde, op basis van de gegeven (residu) zwaartekrancht anomalieën in het binnengebied (dus interpolatie in het binnengebied en extrapolatie in het buitengebied), en vervolgens
- toepassing van Stokes integraal op deze mondiaal gegeven functie $\Delta g(Q)$.

De extrapolatie van zwaartekrancht anomalieën in het buitengebied (de rest van de aarde) en de Stokes integratie hierover, vinden impliciet plaats bij collocatie. De tweede stap die hierboven is gegeven, kan worden gesplitst in twee delen, namelijk de integratie over het binnengebied

$$N_{2_1}(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma_0} St(\psi_{PQ}) \hat{\Delta}g(Q) d\sigma, \quad (2.39)$$

en de integratie over de geëxtrapoleerde residu zwaartekrancht anomalieën in het buitengebied

$$N_{2_2}(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma-\sigma_0} St(\psi_{PQ}) \hat{\Delta}g(Q) d\sigma. \quad (2.40)$$

Als de geïdebijdrage van de residu zwaartekrancht anomalieën in het binnengebied wordt uitgerekend met numerieke integratie, waarbij de gemiddelde blokwaarden kunnen worden gezien als geïnterpoleerde zwaartekrancht functie in het binnengebied, dan wordt alleen de bijdrage N_{2_1} berekend. Collocatie en numerieke integratie zullen dus niet hetzelfde resultaat opleveren, en het verschil is N_{2_2} (2.40).

In de praktijk zal het verschil misschien niet al te groot zijn. In het binnengebied wordt met residu zwaartekrancht anomalieën gewerkt, zodat ook de covariantiefunctie die wordt gebruikt al voor redelijk korte afstanden naar nul zal gaan. Echter, de impliciet geëxtrapoleerde waarden in het buitengebied zijn zeer gevoelig voor de gegeven waarden aan de rand van het binnengebied. In een voorbeeld met een dataset van een deelgebied in Nederland, waarbij aan de rand van het binnengebied een helling in de

functie te zien viel, werden zwaartekrachtanomalieën voorspeld die drie keer zo'n grote amplitude hadden als de maximale gegeven waarde in het binnengebied (De Min, 1993). In hoofdstuk 6 zullen numerieke tests worden uitgevoerd, waaruit blijkt dat verschillen in geoïdehoogteverschillen van 4 cm over 30 km kunnen optreden, tussen collocatie en numerieke integratie.

Om de praktische betekenis van collocatie beter te begrijpen kan de collocatieformule zo worden aangepast dat een gelijk resultaat als bij numerieke integratie moet worden verkregen. De tweede stap, van de tweestapsprocedure zoals die is gegeven voor collocatie, dient te worden veranderd. In plaats van integratie over de gehele aarde, willen we alleen integreren over de voorspelde zwaartekrachtanomalieën in het binnengebied, zoals wordt gedaan bij numerieke integratie. Alleen de N_{21} -bijdrage moet worden berekend. Deze bijdrage kan ook weer worden geschreven als

$$N_{21}(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} St_2(\psi_{PQ}) C_{gg}^{Qi} d\sigma \left(C_{gg}^{ii'}\right)^{-1} \Delta g_i, \quad (2.41)$$

waarin $St_2(\psi) = St(\psi) - St_1(\psi)$ en waarbij $St_1(\psi)$ gegeven is door (2.12). Door nu opnieuw de Stokes functie en de covariantiefunctie uit te schrijven als Legendrereeks, de compositieformule toe te passen op $P_n(\cos \psi)$ en vervolgens de orthogonaliteitsrelaties uit te voeren zoals in (2.37), wordt verkregen

$$\begin{aligned} & \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} St_2(\psi_{PQ}) C_{Q_i}^{gg} d\sigma_Q = \\ & \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \left(\frac{2}{n-1} - Q_n(\psi_o) \right) P_n(\cos \psi_{PQ}) \sum_{n'=2}^{\infty} c_{n'} P_{n'}(\cos \psi_{Q_i}) d\sigma_Q = \\ & \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{2}{n-1} - Q_n(\psi_o) \right) \sum_{n'=2}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \frac{c_{n'}}{2n'+1} \bar{Y}_{nm}(P) \bar{Y}_{n'm'}(i) \delta_{nn'} \delta_{mm'} = \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} & \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{2}{n-1} - Q_n(\psi_o) \right) \frac{c_n}{2n+1} \bar{Y}_{nm}(P) \bar{Y}_{nm}(i) = \\ & \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{n-1} - Q_n(\psi_o) \right) c_n P_n(\cos \psi_{P_i}) = C^{N^*g}(\psi_{P_i}). \end{aligned}$$

Dus de gemodificeerde collocatieformule die alleen maar de geoïdebijdrage van de geïnterpoleerde zwaartekrachtanomalieën in het binnengebied berekend is

$$N_{21}(P) = C_{P_i}^{N^*g} (C_{ii'}^{gg})^{-1} \Delta g_i, \quad (2.43)$$

met

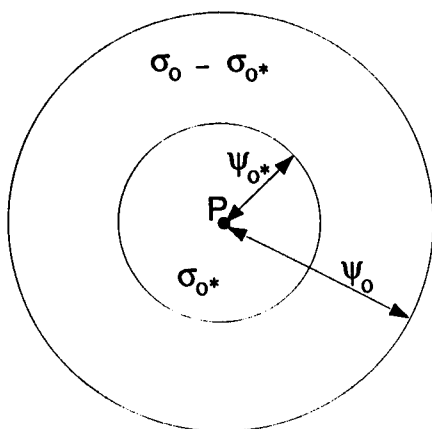
$$C^{N^*g}(\psi) = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{n-1} - Q_n(\psi_o) \right) c_n P_n(\cos \psi). \quad (2.44)$$

Als $\psi_o = 180^\circ$ dan is $Q_n = 0$ en wordt weer (2.37) verkregen. In hoofdstuk 6 zullen voorbeelden van gewone en gemodificeerde kruiscovariantiefuncties $C^{Ng}(\psi)$ en $C^{N^*g}(\psi)$, en

numerieke voorbeelden van de verschillen tussen numerieke integratie en gewone collocatie worden gegeven, en zal tevens worden getoond dat numerieke integratie en gemodificeerde collocatie inderdaad gelijke resultaten opleveren.

Er dient te worden gekozen of slechts wordt geïntegreerd over de geïnterpoleerde zwaartekrachtanomalieën in het binnengebied, of dat ook de bijdrage van de geëxtrapoleerde zwaartekrachtanomalieën in het buitengebied wordt meegenomen in de berekening van N_2 . Zoals al genoemd, kunnen de geëxtrapoleerde zwaartekrachtanomalieën onrealistische waarden aannemen. De gebruikte covariantiefunctie, die wordt bepaald uit de binnengebied zwaartekrachtanomalieën, zal doorgaans de covarianties van de zwaartekrachtanomalieën in het buitengebied niet goed beschrijven. In 2.3.3 is het belang van een juiste covariantiefunctie aangegeven. Verwacht mag worden dat de formele fout in de geoïde kleiner zal worden, omdat de geëxtrapoleerde zwaartekrachtanomalieën theoretisch beter zijn dan geen waarde. Beter moet hier worden geïnterpreteerd als het hebben van een kleinere formele standaardafwijking. Er kan ook worden betwijfeld of het model wel realistisch is. Met een verkeerd model kunnen gemakkelijk optimistische foutschattingen worden verkregen, maar onrealistische resultaten. Een laatste argument om de geëxtrapoleerde zwaartekrachtanomalieën niet te gebruiken is dat een formele geoïdefoutberekening zoals zal worden afgeleid in 2.5, niet meer mogelijk is. Op basis van de hier genoemde argumenten is gekozen om de geoïde van Nederland zonder de geëxtrapoleerde zwaartekrachtanomalieën te bepalen.

De gemodificeerde collocatieformule leidt ook nog naar een combinatiemethode van collocatie en numerieke integratie. Hiervoor wordt het binnengebied in twee delen gesplitst, een heel klein cirkelvormig gebied σ_o^* rondom het geoïdeberekeningspunt P , en het binnengebiedrestant $\sigma_o - \sigma_o^*$. Het extra binnengebied σ_o^* heeft bijvoorbeeld een straal $\psi_o^* = 0.1 - 0.5^\circ$, terwijl het binnengebied enkele graden is. Deze situatie is weergegeven in figuur 2.6.



Figuur 2.6 Het binnengebied wordt opgesplitst in een extra binnengebied σ_o^* en het restant $\sigma_o - \sigma_o^*$.

De berekening van N_2 kan nu worden gedaan door

$$N_2(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma_0^*} St(\psi_{PQ}) \Delta g(Q) d\sigma + \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma_0 - \sigma_0^*} St(\psi_{PQ}) \Delta g(Q) d\sigma. \quad (2.45)$$

Het eerste deel kan dan worden berekend met de gemodificeerde collocatieformule (2.43), en het tweede deel met numerieke integratie. Het toepassen van collocatie in het extra binnengebied heeft als voordeel dat de Stokes integratie wordt uitgevoerd over een optimaal geïnterpoleerde zwaartekrachtfunctie. Doordat collocatie alleen wordt toegepast voor een klein gebied, zullen in de collocatieberekening niet veel waarnemingen worden gebruikt, zodat de inversie van de signaalcovariantiematrix gemakkelijk kan worden uitgevoerd. Doordat de rest van het binnengebied met numerieke integratie wordt uitgevoerd kunnen echter zo veel waarnemingen worden gebruikt als is gewenst. Er is geen beperking meer door computerfaciliteiten of -mogelijkheden.

Lachapelle (1977) heeft ook al eens een combinatietechniek van numerieke integratie en collocatie voorgesteld. Hij paste ook voor een klein binnengebied, het extra binnengebied, collocatie toe. Buiten dit extra binnengebied berekende hij het zwaartekrachteffect van de gebruikte zwaartekrachtdata in het extra binnengebied en trok dit af van de gegeven zwaartekrachtwaarden. Met deze residu zwaartekrachtwaarden werd middels numerieke integratie de overige geoïdebijdrage berekend. In vergelijking met de hier nieuw gepresenteerde combinatietechniek betekent het niet alleen veel meer rekenwerk, maar moet nog steeds het predictiegebied van collocatie worden beperkt tot het binnengebied. Meer details over de nieuwe en de bestaande combinatietechniek worden gegeven in (De Min, 1995c).

Deze nieuwe combinatiemethode heeft als nadeel dat de overgang van extra binnengebied naar de restant van het binnengebied cirkelvormig is, en dat de gemiddelde blokwaarden in de restant van het binnengebied niet precies aansluiten. Of de combinatiemethode te verkiezen is boven alleen numerieke integratie hangt af van de gegeven dataset. Als de dataset een niet al te hoge dichtheid heeft en bovendien nogal onregelmatig gelegen punten heeft, is de combinatiemethode de beste methode. Is er een goede en dichte zwaartekrachtanomaliedataset beschikbaar, dan kan het beste numerieke integratie worden toegepast over voldoende kleine blokgebieden. Omdat de nieuwe Nederlandse dataset, die zal worden beschreven in hoofdstuk 3, zeer goed is zal de geoïde voor Nederland worden berekend met numerieke integratie.

Tot slot moet nog worden opgemerkt dat voor het (theoretische) geval dat het gegeven zwaartekracht-net naar een oneindig hoge dichtheid gaat, alle methoden, numerieke integratie en collocatie, naar dezelfde oplossing toegaan, namelijk de Stokes integraal (2.5). Moritz (1976) heeft aangetoond dat de inversie van collocatie in dit geval analytisch plaats vindt en de Stokes integraal wordt verkregen. Men kan zich dat ook voorstellen, omdat bij zo'n zeer hoge dichtheid de interpolatie met kleinste-kwadraten predictie geen betekenis meer heeft (er valt niets te interpoleren) en de transformatiestap naar geoïdehoogten resteert, wat de Stokes integraal is. In de praktijk is er geen oneindig hoge dichtheid, en vooral geen globale bedekking, waardoor de verschillen zoals in deze paragraaf zijn geschetst ontstaan. Als de data in een lokaal gebied wel een zeer hoge

dichtheid hebben, dan ontstaat bij het toepassen van collocatie het probleem dat de interpolatie geen betekenis meer heeft, wat resulteert in de singulariteit van de te inverteren matrix. De collocatiemethode bestaat (numeriek) alleen als de interpolatie een relevante bijdrage heeft in de geïdeschatting.

2.4 Keuze van de covariantiefunctie

Zoals al genoemd in paragraaf 2.3 bij de behandeling van de collocatiemethode, speelt de covariantiefunctie hierin een belangrijke rol. Dit geldt ook voor kleinste-kwadraten predictie en de beschrijving van de fout in gemiddelde blokwaarden, waarvoor de covariantiefunctie ook wordt gebruikt. De covariantiefunctie die wordt gebruikt moet de correlatie en variantie van de onderhavige dataset zo goed mogelijk beschrijven. In deze paragraaf zal daarom eerst worden beschreven hoe de variantie en covarianties van een lokale dataset kunnen worden bepaald. Daarna wordt ingegaan op hoe deze zo goed mogelijk kunnen worden beschreven door een model voor de covariantiefunctie.

2.4.1 Empirische covariantiefunctie

Voor de modellering van de te gebruiken covariantiefunctie wordt eerst een empirische covariantiefunctie bepaald uit de beschikbare metingen. Dit kan op verschillende manieren gebeuren. Voordat covariantieberekeningen kunnen worden uitgevoerd, wordt altijd de gemiddelde waarde van het signaal (meestal het gemiddelde van de gegeven functiewaarden) van alle gegeven waarden afgetrokken. De data zijn dus gecentreerd.

Als de beschikbare data op het volledige domein zijn gegeven, dan wordt de berekening van de covarianties gedaan middels (A.20). Voor discrete waarden, gegeven op een equidistant grid (of lijn, maar we bespreken hier alleen het 2 dimensionele geval) wordt dit

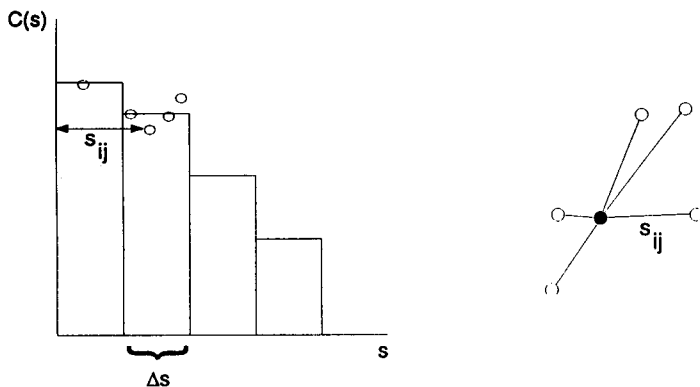
$$C(s) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \cdot x_{i'} . \quad (2.46)$$

i' is het punt dat hoort bij het punt i , waarbij de afstand tussen de punten i en i' gelijk is aan s . Als het discrete signaal equidistant en op het hele domein (of periodiek) gegeven is dan is het aantal punten N en het aantal producten dat wordt gebruikt voor de berekening van $C(s)$ altijd gelijk. Dit geldt zowel voor 1-dimensionele als 2-dimensionele gevallen.

Een tweede manier om de covariantie te beschrijven is middels de combinatie van de variantie $C(0)$ en een variogram (Haas&Viallix, 1976). Het variogram wordt berekend volgens

$$\gamma(s) = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i'})^2 . \quad (2.47)$$

Deze functie geeft evenals de covariantiefunctie aan dat er een bepaalde gemiddelde samenhang is tussen punten op een afstand s van elkaar. Covariantiefuncties en variogrammen kunnen ook richtings- én afstandafhankelijk zijn. Maar hier zullen alleen functies die afhangen van de afstand worden bestudeerd.



Figuur 2.7 Berekening van empirische covariantiewaarden voor intervallen. Het gemiddelde van de producten van twee puntwaarden die op een afstand s liggen die binnen het interval ligt, wordt berekend. De rechter figuur geeft de 2 dimensionale weergave van de onderlinge puntligging.

Afgeleid kan worden dat

$$\begin{aligned}
 C_2(s) &:= C(0) - \gamma(s) = C(0) - \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i'})^2 & (2.48) \\
 &= C(0) - \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N x_{i'}^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \cdot x_{i'} \\
 &= C(0) - \frac{1}{2}C(0) - \frac{1}{2}C(0) + C(s) = C(s) .
 \end{aligned}$$

Voor regelmatig verdeelde en periodieke data geven de beide methoden precies dezelfde covariantiefunctie.

Nu zullen de beide formuleringen worden toegepast op het praktische geval waarbij de gegeven data niet het gehele domein bedekken, en niet regelmatig zijn verdeeld en/of periodiek voortgezet. Er kan dan een experimentele of empirische covariantiefunctie worden berekend. De berekening hiervan wordt gedaan met behulp van afstandsintervallen. Het aantal punten dat is gegeven in de totale set is N . Het aantal tweetallen van punten dat wordt gebruikt om de covariantiewaarde voor afstand s te bepalen wordt aangeduid met n_s . Afhankelijk van s kan n_s groter of kleiner zijn dan N . s is de afstand tot het middelpunt van een interval, welke een breedte Δs heeft. Dus als $s - \frac{\Delta s}{2} < s_{x_i x_{i'}} < s + \frac{\Delta s}{2}$, dan wordt het koppel i, i' gebruikt voor de covariantieberekening van het desbetreffende interval. Dit wordt aangegeven in figuur 2.7.

De eerste manier om een empirische covariantiefunctie te bepalen, en degene die wordt toegepast in de fysische geodesie (Denker, 1988; Gerrard, 1990; Rummel, 1990), volgt uit (2.46)

$$C_{1,n_s}(s) = C(s) = \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} x_i \cdot x_{i'} . \tag{2.49}$$

De eerste onderindex 1 geeft de methode aan, de tweede het aantal gebruikte paren (tweetalen) dat voor de berekening van $C(s)$ wordt gebruikt. De variantie $C(0)$ is dus $C_{1,N}(0)$.

Uit de variogram methode kan een empirische covariantiefunctie worden bepaald middels (Haas&Viallix, 1976)

$$C_{2,n_s}(s) = C(0) - \frac{1}{2n_s} \sum_{i=1}^{n_s} (x_i - x_{i'})^2 . \quad (2.50)$$

Deze twee manieren om de empirische covariantiefunctie te bepalen leveren niet hetzelfde resultaat op. Dit kan worden gezien door uit te schrijven

$$\begin{aligned} C_{2,n_s}(s) &= C(0) - \frac{1}{2n_s} \sum_{i=1}^{n_s} (x_i - x_{i'})^2 \\ &= C(0) - \frac{1}{2n_s} \sum_{i=1}^{n_s} (x_i^2 + x_{i'}^2) + \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} x_i \cdot x_{i'} \\ &= C_{1,n_s}(s) + C(0) - \frac{1}{2n_s} \sum_{i=1}^{n_s} (x_i^2 + x_{i'}^2) . \end{aligned} \quad (2.51)$$

De laatste term aan de rechterkant zal meestal niet gelijk zijn aan $C(0)$, omdat niet alle punten precies even vaak meedoen in interval s .

Voor intervallen met een kleine afstand s zullen niet alle punten meedoen in de betreffende subset. Met berekening $C_1(s)$ wordt echter de absolute covariantie bepaald op basis van de punten uit de subset. Deze covariantie kan aanzienlijk afwijken van de variantie $C(0)$, omdat de variantie van de punten in de subset $C_{1,n_s}(s)$ ook aanzienlijk kan afwijken van $C(0)$. Met de tweede methode $C_2(s)$ wordt in feite het absolute verschil in covariantie en variantie van de subset n_s berekend en wordt dit verschil toegepast op de variantie $C(0)$ van de totale dataset. Dit laatste is beter als niet alle punten meedoen of even vaak meedoen, zoals voor korte afstanden vaak het geval is. Wat namelijk vooral van belang is voor de korte afstanden waar nog veel correlatie is, is dat de covariantiefunctie nauwkeurig aangeeft hoe veel een functiewaarde kan veranderen (absoluut of relatief) over een bepaalde afstand en niet direct wat de absolute waarde van de covariantie is. Dit kan dus beter met $C_2(s)$ dan met $C_1(s)$.

Belangrijk is hoe groot het percentage correlatie is voor twee functiewaarden op een bepaalde afstand van elkaar. Dit percentage correlatie moet dan worden gerelateerd aan de variantiewaarde van de hele dataset $C(0)$. De empirische covariantiefunctiewaarden die dit beschrijven kunnen worden berekend volgens

$$C_{3,n_s}(s) := \frac{C_{1,n_s}(s)}{C_{1,n_s}(0)} C(0) , \quad (2.52)$$

met weer $C_{1,n_s}(s)$ volgens (2.49) en dus

$$C_{1,n_s}(0) = \frac{1}{2n_s} \sum_{i=1}^{n_s} (x_i^2 + x_{i'}^2) . \quad (2.53)$$

n_s geeft aan dat wordt gemiddeld over alle n_s puntenparen die in het interval s vallen. Hiermee wordt het relatieve covariantieverschil met $C(0)$ gegeven (een schaling naar de hele dataset), in tegenstelling tot $C_2(s)$ waarmee het absolute covariantieverschil wordt gegeven.

Als de formule van $C_3(s)$ wordt vergeleken met die van $C_1(s)$ en $C_2(s)$, dan zien we dat

$$\begin{aligned}
 C_{2,n_s}(s) &= C_{1,n_s}(s) + \{C(0) - C_{1,n_s}(0)\} \\
 C_{3,n_s}(s) &= C_{1,n_s}(s) + \{C(0) - C_{1,n_s}(0)\} \frac{C_{1,n_s}(s)}{C_{1,n_s}(0)}. \tag{2.54}
 \end{aligned}$$

Als s klein is dan is $C(0) - C_{1,n_s}(0) \ll C_{1,n_s}(s)$, en kan op basis van de orde van grootte van de verschillende termen (percentage van $C(0)$)

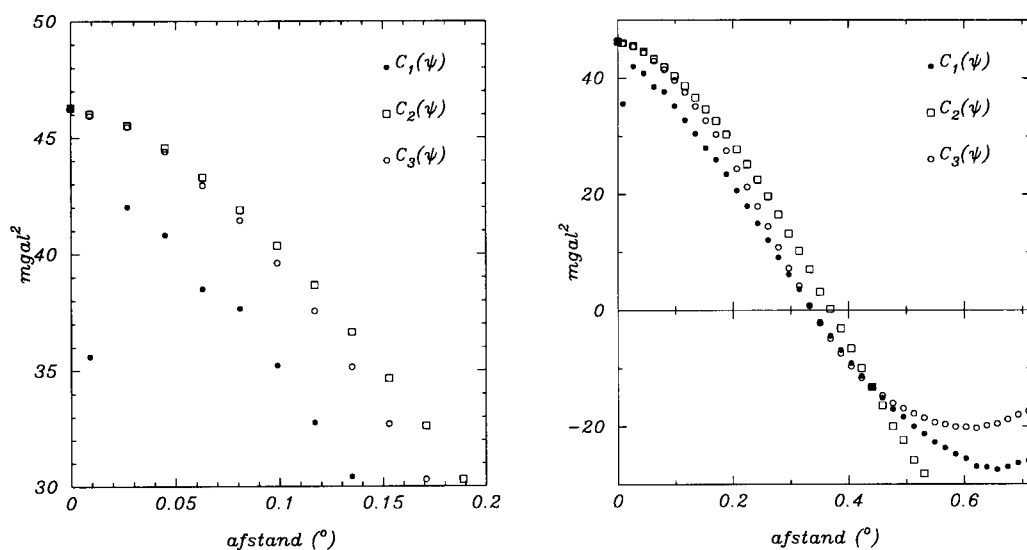
$$\begin{aligned}
 C_2(s) &= C_{1,n_s}(s) + \{C(0) - C_{1,n_s}(0)\} 1 \\
 &\quad \quad \quad 90\% \quad \quad 10\% \quad \quad 100\% \\
 C_3(s) &= C_{1,n_s}(s) + \{C(0) - C_{1,n_s}(0)\} \frac{C_{1,n_s}(s)}{C_{1,n_s}(0)} \tag{2.55} \\
 &\quad \quad \quad 90\% \quad \quad 10\% \quad \quad 90\%
 \end{aligned}$$

worden gezien dat het verschil tussen $C_2(s)$ en $C_3(s)$ klein zal zijn. Als s groter is, zodat $C_{1,n_s}(s)$ significant kleiner is dan $C(0)$ dan

$$\begin{aligned}
 C_1(s) &= C_{1,n_s}(s) \\
 &\quad \quad \quad 10\% \\
 C_3(s) &= C_{1,n_s}(s) + \{C(0) - C_{1,n_s}(0)\} \frac{C_{1,n_s}(s)}{C_{1,n_s}(0)} \tag{2.56} \\
 &\quad \quad \quad 10\% \quad \quad 10\% \quad \quad 10\%
 \end{aligned}$$

Het verschil tussen $C_1(s)$ en $C_3(s)$ zal nu klein zijn. Het verschil met $C_2(s)$ kan groot zijn ($C_2(s) \approx 20\%$ van $C(0)$).

Voor de goede orde wordt nog opgemerkt dat altijd geldt $C_1(0) = C_2(0) = C_3(0)$. En verder dat $C_1(s) = C_2(s) = C_3(s)$ als de gegeven data equidistant en periodiek gegeven zijn. N is dan niet gelijk aan n_s , maar omdat altijd alle N punten worden gebruikt en ook allemaal precies evenveel, leveren de drie methoden identieke resultaten op. Alleen in het praktische geval van onregelmatig gelegen data (en veelal ook niet periodiek/mondiaal gegeven) leveren de methoden verschillende resultaten op.



Figuur 2.8 Voorbeeld van drie manieren om de empirische covariantiefunctie te bepalen. Dit is gedaan met een deel van de Nederlandse zwaartekrachtdataset.

Ter illustratie geeft figuur 2.8 de drie empirische covariantiefuncties berekend uit een gedeelte van de Nederlandse zwaartekrachtdataset. In totaal zijn 1034 puntwaarden gegeven in dit deelgebied. Duidelijk is te zien dat de waarde van $C_1(s)$ voor kleine s niet weergeeft wat is gewenst, namelijk de correlatie voor korte afstanden. Voor het eerste interval wordt een waarde gevonden van ongeveer 36, terwijl $C_2(s)$ en $C_3(s)$ ongeveer 46 opleveren. Verder blijkt dat $C_3(s)$ voor grotere afstanden het dichtste bij nul blijft, wat ook wordt verwacht van het zwaartekrachtsignaal. De empirische covariantiefunctie kan het beste middels $C_3(s)$ worden berekend met (2.52).

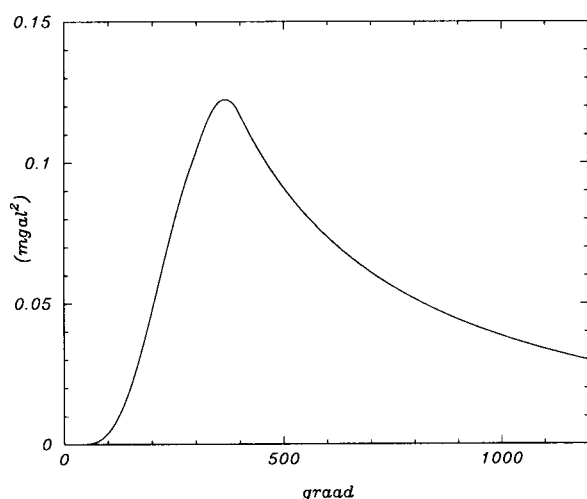
2.4.2 Bepalen van een graadvariantiemodel bij de empirische covariantiefunctie

Als de empirische covariantiefunctie van een dataset is berekend, dan zijn enkele functiewaarden bekend voor afstanden met stappen van de gekozen intervalbreedte. Om collocatie of kleinste-kwadraten predictie te kunnen uitvoeren is een continue functie nodig, om voor elke willekeurige afstand de covariantiefunctiewaarde te kunnen uitrekenen. De covariantiematrix die met deze functie wordt berekend moet positief-definiet zijn, omdat anders de matrix, die moet worden geïnverteerd, singulier kan zijn waardoor de inversie niet mogelijk is. Bovendien levert collocatie niet persé de kleinste-kwadraten oplossing als de matrix uit de covariantiefunctie niet positief-definiet is (Krarup, 1969). De echte covariantiefunctie geeft altijd een positief-definiëte matrix, maar omdat we hier een schatting hebben op basis van metingen kan het voorkomen dat de matrix uit deze schatting niet positief-definiet is.

Als voor collocatie gekozen is, en verschillende gemeten grootheden of getransformeerde grootheden berekend moeten worden, dan wordt een covariantiefunctie van de vorm (2.30) genomen. De transformaties kunnen dan eenvoudig met inbrenging van de be-

treffende eigenwaarde worden gedaan. Als alle graadvarianties c_n groter of gelijk aan nul zijn, dan is de uit de covariantiefunctie resulterende matrix positief-definiet. Voor lokale interpolaties kunnen ook lokale (platte vlak) functies worden gebruikt. Niet alle functies die daarvoor geschikt lijken geven positief-definiëte matrices. Enkele veel toegepaste functies worden gegeven door (Moritz, 1980a, p.179). Met deze functies is het vaak niet mogelijk om kruiscovariantiefuncties met andere grootheden te bepalen. In (De Min, 1990) wordt hiervoor een enkel voorbeeld afgeleid waarmee het wel kan. We zullen er hier niet verder op ingaan, omdat met een Legendrereeks (2.30) de covariantievoortplanting eenvoudiger is.

Er zal nu worden bekeken hoe een graadvariantiespectrum kan worden bepaald, zodanig dat een zo goed mogelijke aansluiting bij de discrete waarden van de empirische covariantiefunctie wordt gevonden. Uitgangspunt voor het graadvariantiespectrum is de formule (2.32) zoals bijvoorbeeld gegeven door (Knudsen, 1987; Basič&Rapp, 1992). Deze graadvarianties ε_n en c_n beschrijven de globale gemiddelde signaalinhoud, voor residu zwaartekrachtanomalieën. Voor een lokale dataset kunnen de amplitudes van de graadvarianties anders zijn, maar ook kan de verdeling van de totale energie over het spectrum anders zijn. Soms worden de parameters s en B vastgehouden (zie bijvoorbeeld (Basič&Rapp, 1992)) en worden alleen de variantiewaarden met behulp van A geschaald. Dat betekent dat de vorm van de covariantiefunctie altijd hetzelfde is, en dat alleen de absolute waarde verschilt. Ook kunnen alle parameters worden aangepast, zodat een zo goed mogelijke aansluiting bij de lokale empirische covariantiefunctie wordt gevonden. Als het binnengebied bijvoorbeeld 5° is, dan bedekt dat slechts 0.4% van het totale aardoppervlak, zodat een afwijking van de lokale covariantiefunctie van het mondiale gemiddelde zeer goed mogelijk is. Voor zo'n klein gebied zullen de lage graden (bijvoorbeeld tot $n = 18 - 36$) alleen een constante signaalbijdrage leveren. Aangezien voor de berekening van de covariantiewaarden de gemiddelde waarde van de punten wordt afgetrokken zullen de lage graden helemaal niet voorkomen in de lokale empirische covariantiefunctie. Het signaalspectrum kan daarom beter bij een bepaalde lage graad n_{min} worden begonnen. Vanaf deze graad zal het spectrum een ooplopend karakter hebben, omdat de fouten in het gebruikte geopotentiaal model voor hogere graden groter zijn dan voor lagere graden. Vanaf de maximale graad van het geopotentiaalmodel zal het signaal spectrum in ieder geval weer gaan aflopen, zoals wordt aangegeven door Kaula's regel $c_n(\Delta g) \approx 1/n$. Ook bij de maximale graad N_{max} van het geopotentiaal model kan het lokale signaal afwijken van de modellen ε_n en c_n . Een gladde overgang in het spectrum (bijvoorbeeld door een gewogen gemiddelde van ε_n en c_n) rondom N_{max} is even goed mogelijk als de scherpe overgang in het graadvariantiespectrum bij direct gebruik van ε_n en c_n . Bij het vinden van een zo goed mogelijk passend covariantiemodel dient enige soepelheid te worden betracht. Een voorbeeld van een signaalgraadvariantie spectrum wordt gegeven in figuur 2.9. De parameters waarmee kan worden gevarieerd om een zo goed mogelijk passend model te vinden zijn n_{min} , A , B , s , en eventueel een kleine verschuiving van N_{max} . In het algemeen blijkt een vergroting van s het spectrum voor hoge graden zodanig te beïnvloeden dat er meer hoge frequenties in de covariantiefunctie komen. Hierdoor neemt de correlatielengte af. Bij een verplaatsing van n_{min} naar een hogere graad zullen er minder grote golflengten in de covariantiefunctie voorkomen, waardoor ook de correlatielengte kleiner wordt.



Figuur 2.9 Voorbeeld van graadvariantiemodel om zo goed mogelijk aan te sluiten bij de empirische covariantiefunctie.

Van belang bij een goede aansluiting aan de empirische covariantiefunctie zijn variantiewaarde, die gemakkelijk kan worden aangepast met A , de correlatielengte en de kromming van de covariantiefunctie voor afstand 0. Verder kan de eerste nuldoorgang worden gebruikt voor vastlegging van de beste overeenkomst (*fit*), omdat daarmee ook de kromming voor korte afstanden wordt bepaald.

Vaak is het lastig om een goede overeenkomst te krijgen tussen een empirische covariantiefunctie en een covariantiefunctie berekend op basis van een graadvariantiespectrum. Ondanks dat juist vele parameters vrij kunnen worden gekozen, blijkt het verkrijgen van een goede aanpassing moeilijk. Het is meestal gemakkelijker om met een lokale analytische functie een goede overeenkomst met de empirische covariantiefunctie te verkrijgen, vooral voor kleine afstanden. Het probleem, of nadeel, van zo'n lokale analytische functie is dat kruiscovariantiesfuncties tussen zwaartekrancht anomalies en andere grootheden niet eenvoudig kunnen worden berekend omdat deze functies niet kunnen worden geschreven als (2.30). Daarom kunnen de lineaire operatoren die gelden op de bol niet eenvoudig spectraal worden toegepast. De lokale functies zijn alleen gemakkelijk voor interpolatiedoeleinden. Hiervoor zijn ze zeer geschikt, omdat juist bij interpolatiefoutberekening de gebruikte covariantiefunctie een belangrijke rol speelt, en de correlaties uit de empirische covariantiefunctie goed moeten worden beschreven voor korte afstanden. In hoofdstuk 4 zal een analytische functie worden gegeven, die meestal goed is aan te sluiten aan de empirische covariantiefunctie.

Concluderend kan worden gesteld dat voor transformatiedoeleinden, bijvoorbeeld geoidhoogten uit zwaartekracht, met Legendrereeksen wordt gewerkt. Daarbij dient een graadvariantiespectrum te worden gevonden waarvan de daaruitvolgende covariantiefunctie zo goed mogelijk aansluit bij de empirische covariantiefunctie. Voor interpolatiedoeleinden, waarbij niet naar een andere grootheid wordt getransformeerd, kan beter een eenvoudige analytische functie worden gekozen, omdat die doorgaans beter is aan te passen bij de empirische covariantiefunctie.

2.5 Fout in de geoïde

Nu hebben we alle ingrediënten behandeld om de geoïde te kunnen uitrekenen in de praktijk. In 2.2 en 2.3 is beschreven hoe de geoïde wordt bepaald als combinatieoplossing van gegeven zwaartekrachtdata. De fout in de geoïde ten gevolge van de gebruikte data bestaat dan uit vier delen. Dit zijn

- de ruis van de geopotentialcoëfficiënten,
- de afbreekfout,
- de fout (ruis) van de gemiddelde blokwaarden in het binnengebied, en
- de discretisatiefout.

Ze zullen in deze paragraaf worden behandeld. Het betreft hier geen modelfouten of benaderingen in de evaluatiemethode, maar zuiver en alleen fouten ten gevolge van fouten in de gebruikte data. Deze fouten kunnen alle worden beschouwd als ruis van de data.

In de literatuur is door verschillende auteurs aandacht besteed aan deze fouten. Voorbeelden hiervan zijn (Wenzel, 1981; Wenzel, 1985; Strang van Hees, 1986; Heck&Grüniger, 1987; Sjöberg, 1986; Sjöberg&Stocki, 1986; Fan, 1989; Smeets, 1992). De berekening van de eerste twee fouten zal hier net zo worden gedaan als in deze literatuur. Bij de berekening van de foutvoortplanting van de binnengebied blokwaarden en de discretisatiefout zal hier een andere aanpak worden gehanteerd. Hiervoor is gekozen omdat in het algemeen teveel benaderingen en vereenvoudigingen worden gemaakt om tot een nauwkeurige foutschatting te komen.

Ruis van de coëfficiënten van het geopotentialmodel

De geoïdebijdrage van het gebruikte geopotentialmodel wordt gegeven door (2.16). Er wordt nogmaals aan herinnerd dat daarbij is uitgegaan van een cirkelvormig binnengebied rondom het geoïdeberekeningpunt. Wordt op deze formule de algemene wet van voortplanting van varianties toegepast, met als foutcovariantie van de coëfficiënten $\sigma_{\overline{\Delta C}_{nm} \overline{\Delta C}_{n'm'}}$, dan

$$\sigma_{1,N(P_1)N(P_2)} = R^2 \sum_{n=2}^{N_{max}} \sum_{n'=2}^{N_{max}} \left(\frac{n-1}{2} Q_n(\psi_o) \right) \left(\frac{n'-1}{2} Q_{n'}(\psi_o) \right) \quad (2.57)$$

$$\sum_{m=-n}^n \sum_{m'=-n'}^{n'} \sigma_{\overline{\Delta C}_{nm} \overline{\Delta C}_{n'm'}} \bar{Y}_{nm}(P_1) \bar{Y}_{n'm'}(P_2) .$$

Voor veel globale geopotentialmodellen zijn alleen de varianties van de coëfficiënten gegeven en de covarianties niet. Dit geldt momenteel voor alle hoge graad en orde ($N_{max} > 50$) geopotentialmodellen. (2.57) verandert dan in

$$\sigma_{1,N(P_1)N(P_2)} = R^2 \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{n-1}{2} Q_n(\psi_o) \right)^2 \sum_{m=-n}^n \sigma_{\overline{\Delta C}_{nm}}^2 \bar{Y}_{nm}(P_1) \bar{Y}_{nm}(P_2) . \quad (2.58)$$

Als nu een vereenvoudiging wordt toegepast door het gemiddelde van de foutvarianties per graad n te nemen, dat wil zeggen dat foutgraadvarianties $\varepsilon_n = \sum_{m=-n}^n \sigma_{\Delta C_{nm}}^2$ worden berekend, dan wordt de fout in de geöïde beschreven door

$$\begin{aligned}\sigma_{1,N(P_1)N(P_2)} &= R^2 \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{n-1}{2} Q_n(\psi_o) \right)^2 \sum_{m=-n}^n \frac{\varepsilon_n}{2n+1} \bar{Y}_{nm}(P_1) \bar{Y}_{nm}(P_2) \\ &= R^2 \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{n-1}{2} Q_n(\psi_o) \right)^2 \varepsilon_n P_n(\cos \psi_{P_1 P_2}) .\end{aligned}\quad (2.59)$$

Haagmans&Van Gelderen (1991) hebben laten zien dat voor GEM-T1 ($N_{max} = 36$), waarvan wel een volledige variantie-covariantiematrix gegeven is, verschillen tot 50% in de geöïdefout kunnen optreden. Deze verschillen worden gevonden al naar gelang de juiste volledige covariantiematrix wordt gebruikt, of alleen de diagonaalelementen daarvan (de varianties). Verder blijkt dat het middelen van de varianties per graad, tot graadvarianties ε_n , dus het gebruik van (2.59) in plaats van (2.58), geen significante wijziging van de fout oplevert. Voor de globale geopotentiaalmodellen waarvan alleen de varianties van de coëfficiënten beschikbaar zijn, kan (2.59) worden gebruikt. Dit is gemakkelijker en sneller te berekenen dan (2.58). Er moet wel worden bedacht dat een afwijking van de werkelijke fout mogelijk is. Voor gebieden die een goede bedekking met zwaartekrachtanomalieën hebben, zoals Europa, mag worden aangenomen dat deze benaderde (gemiddelde) foutenmaat niet optimistisch zal zijn.

De fout in een absolute geöïdehoogte ten gevolge van de ruis van de gebruikte geopotentialcoëfficiënten wordt nu beschreven door

$$\sigma_{1,N(P)}^2 = R^2 \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{n-1}{2} Q_n(\psi_o) \right)^2 \varepsilon_n ,\quad (2.60)$$

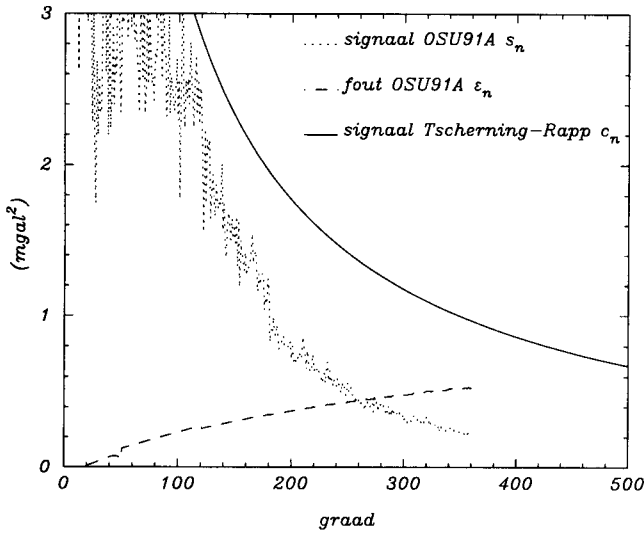
aangezien $P_n(\cos 0) = 1$. De fout in een relatieve geöïdehoogte, een geöïdehoogteverschil, wordt gegeven door

$$\begin{aligned}\sigma_{1,\Delta N(P_1,P_2)}^2 &= \sigma_{1,N(P_1)}^2 + \sigma_{1,N(P_2)}^2 - 2\sigma_{1,N(P_1)N(P_2)} = \\ &= R^2 \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{n-1}{2} Q_n(\psi_o) \right)^2 \varepsilon_n 2(1 - P_n(\cos \psi_{P_1 P_2})) .\end{aligned}\quad (2.61)$$

In figuur 2.10 worden de signaal- en foutgraadvarianties van het globale geopotentiaalmodel OSU91A (Rapp e.a., 1991) gegeven. In figuur 2.11 wordt de geöïdefout ten gevolge van de ruis van de geopotentialcoëfficiënten gegeven door middel van de stip-pellijn.

Afbreekfout

In de combinatieberekening (2.18) wordt een deel van het zwaartekrachtssignaal op aarde niet gebruikt. Het betreft de hoge frequenties, $n > N_{max}$, in het buitengebied, zie ook figuur 2.3. Deze informatie is meestal niet beschikbaar. Dit deel van de geöïde wordt



Figuur 2.10 Signaal- en foutgraadvarianties van OSU91A ($N_{max} = 360$), en de signaalgraadvarianties van het Tscherning-Rapp model (A.23). Alle graadvarianties zijn berekend voor zwaartekrachtenanomalieën.

geschreven als

$$\begin{aligned} \delta N(P) &= \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma-\sigma_o} St(\psi) \Delta g_{n>N_{max}}(Q) d\sigma \\ &= \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=N_{max}+1}^{\infty} Q_n(\psi_o) \Delta g_n. \end{aligned} \quad (2.62)$$

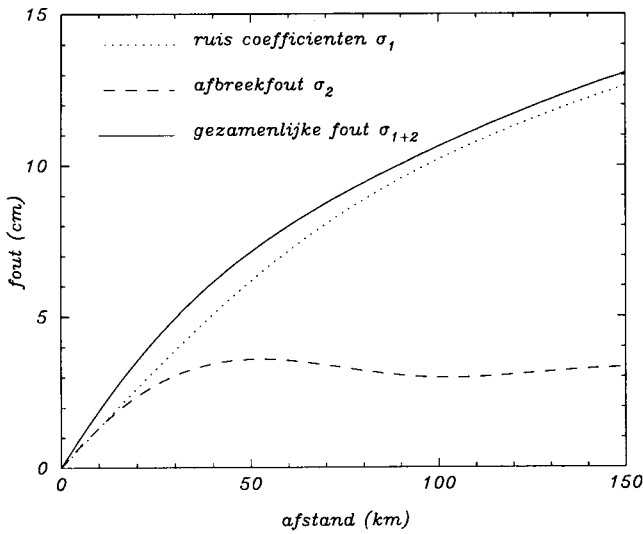
Omdat er geen data beschikbaar zijn stellen we $\Delta g_n = 0$. Deze nuldata hebben een foutvariantie die gelijk is aan de energie van het signaal zelf, $\sigma_{\Delta g_n}^2 = c_n$. De foutvariantie van de geoïde ten gevolge van de afbreekfout, het weglaten van de hoge frequenties in het buitengebied, wordt dan beschreven door

$$\sigma_{2,N(P)}^2 = \left(\frac{R}{2\gamma}\right)^2 \sum_{n=N_{max}+1}^{\infty} (Q_n(\psi_o))^2 c_n, \quad (2.63)$$

en

$$\sigma_{2,\Delta N(P_1,P_2)}^2 = \left(\frac{R}{2\gamma}\right)^2 \sum_{n=N_{max}+1}^{\infty} (Q_n(\psi_o))^2 c_n 2(1 - P_n(\cos \psi_{P_1 P_2})), \quad (2.64)$$

voor respectievelijk absolute en relatieve geoïdehoogten. Voor de afschatting van deze fout kan gebruik worden gemaakt van bijvoorbeeld het graadvariantiemodel van Tscherning en Rapp, zoals dat is behandeld in A.2. Figuur 2.10 laat deze signaalgraadvarianties van zwaartekrachtenanomalieën zien, samen met de signaalgraadvarianties van het OSU91A-model, terwijl figuur 2.11 laat zien wat de afbreekfout is voor relatieve geoïdehoogten en wat de fout ten gevolge van de ruis in de geopotentialcoëfficiënten en wat de fout door deze twee gezamenlijk is.

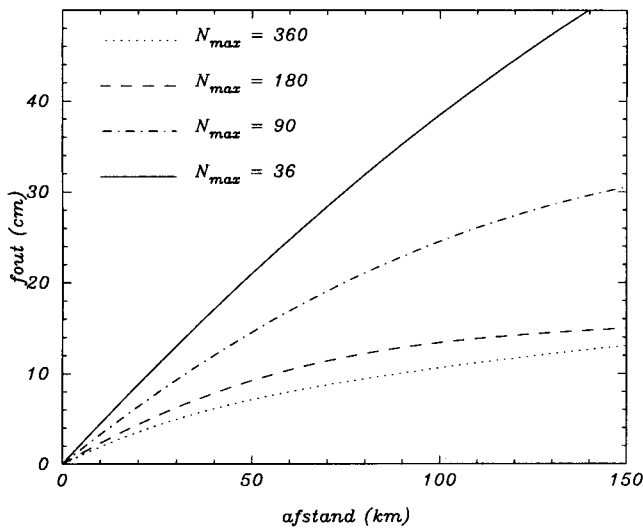


Figuur 2.11 *Geoïdehoogteverschilfout ten gevolge van de ruis in de geopotentialcoëfficiënten (2.61), en de afbreekfout (2.64), voor een binnengebiedstraal van $\psi_o = 5^\circ$, $N_{max} = 360$. De gebruikte graadvarianties zijn die uit figuur 2.10.*

Uit de figuren kan worden gelezen dat voor grotere afstanden $\psi_{P_1 P_2}$ de fout ten gevolge van de ruis van de geopotentialcoëfficiënten domineert. Deze fout neemt toe met de afstand tussen de twee geoïdeberekeningspunten. Dit geldt ook voor de afbreekfout tot een afstand van ongeveer 50 km. Daarna neemt de fout weer iets af en blijft ongeveer 3-4 cm. Als een lagere maximale graad N_{max} van het gebruikte geopotentialmodel wordt gekozen, dan wordt de fout ten gevolge van $\sigma_{\overline{\Delta C_{nm}}}$ kleiner, en de afbreekfout groter. Voor enkele andere waarden van N_{max} is de som van de twee fouten gegeven in figuur 2.12. In dit voorbeeld wordt de totale fout groter als N_{max} kleiner wordt gekozen. Dit kan eenvoudig worden begrepen uit figuur 2.10, waarin de signaalgraadvarianties c_n altijd groter zijn dan de foutgraadvarianties van OSU91A ε_n . Elke graad n beneden 360 die wordt weggelaten van het geopotentialmodel en ingevuld met nuldata geeft een grotere fout.

Als de kapgrootte ψ_o groter wordt gemaakt, dan zal zowel de fout ten gevolge van de ruis van de geopotentialcoëfficiënten, als de afbreekfout kleiner worden, omdat het gebied waar deze data worden gebruikt kleiner wordt. En andersom, zullen de fouten groter worden als het binnengebied kleiner wordt gekozen. Figuur 2.13 laat dit zien voor enkele waarden van de binnengebiedgrootte.

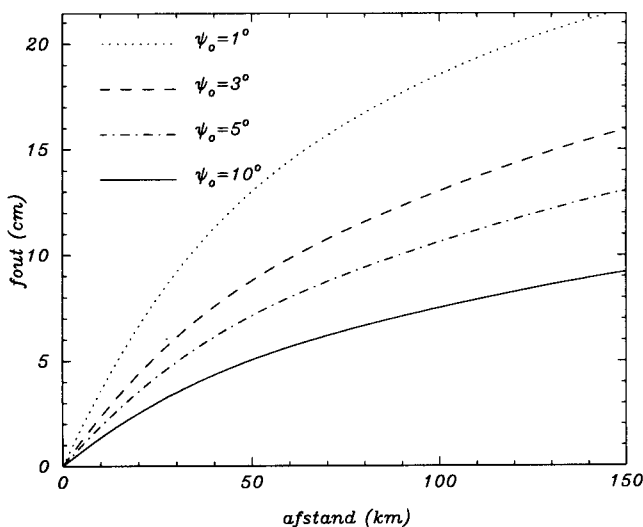
Hieruit blijkt dat de kleinste geoïdefout wordt verkregen als de maximale graad van het gebruikte geopotentialmodel zo hoog mogelijk wordt genomen, en het binnengebied zo groot mogelijk. Beide hebben in de praktijk hun beperkingen, door het gebrek aan goede zwaartekrachtdata. Voor afstanden groter dan 50 km tussen de twee geoïdeberekeningspunten is de combinatie van de twee fouten in de orde van dm's.



Figuur 2.12 Gezamenlijke geoïdehoogteverschilfout door de ruis van de geopotentialcoëfficiënten en de afbreekfout, voor de waarden van $N_{max} = 360, 180, 90$ en 36 , $\psi_0 = 5^\circ$.

Fout van de gemiddelde blokwaarden in het binnengebied

Tot nu toe zijn alleen de fouten ten gevolge van de buitengebieddata behandeld, daar komen de fouten ten gevolge van de gebruikte data in het binnengebied nog bij. Een belangrijke foutenbron voor de geoïde kan een systematische fout in de binnengebied-dataset zijn. Heck (1990) geeft hiervan een uitvoerig overzicht inclusief het effect op de geoïde. Mede omdat het vrijwel onmogelijk is iets te zeggen over deze systematische fouten richten we ons hier alleen op de foutvoortplanting van de werkelijke ruis van



Figuur 2.13 Geoïdehoogteverschilfout door de ruis van de geopotentialcoëfficiënten en de afbreekfout, voor de waarden van $\psi_0 = 1^\circ, 3^\circ, 5^\circ$ en 10° , $N_{max} = 360$.

de binnengebieddata. Vergelijking (2.19) geeft aan hoe de bijdrage van de gemiddelde zwaartekrachtwaarden in het binnengebied aan de geoïde wordt berekend in de praktijk. De fout ten gevolge van deze data wordt bepaald door toepassing van de algemene wet van voortplanting van varianties daarop.

$$\sigma_{3,N(P)}^2 = \sum_{i=1}^I \sum_{i'=1}^I w_i^{St} w_{i'}^{St} \sigma_{\overline{\Delta g_i} \overline{\Delta g_{i'}}} . \quad (2.65)$$

Hierin is I het aantal blokwaarden waarover wordt geïntegreerd, en geeft $\sigma_{\overline{\Delta g_i} \overline{\Delta g_{i'}}$ de covarianties van de blokwaarden. Voor geoïdehoogteverschillen wordt gevonden

$$\sigma_{3,\Delta N(P_1,P_2)}^2 = \sum_{i=1}^I \sum_{i'=1}^I (w_i^{St_{P_1}} - w_i^{St_{P_2}}) (w_{i'}^{St_{P_1}} - w_{i'}^{St_{P_2}}) \sigma_{\overline{\Delta g_i} \overline{\Delta g_{i'}}} . \quad (2.66)$$

Als de fouten in de gemiddelde zwaartekrachtblokwaarden ongecorrleerd zijn, dus als er alleen foutvarianties zijn, dan wordt de fout in de relatieve geoïdehoogte

$$\sigma_{3,\Delta N(P_1,P_2)}^2 = \sum_{i=1}^I (w_i^{St_{P_1}} - w_i^{St_{P_2}})^2 \sigma_{\overline{\Delta g_i}}^2 . \quad (2.67)$$

Deze benadering wordt vaak ingevoerd (bijvoorbeeld Heiskanen&Moritz, 1967; Strang van Hees, 1986). Er wordt beargumenteerd dat deze aanname natuurlijk is, als bij de berekening van gemiddelde blokwaarden alleen maar meetpunten worden gebruikt die in het betreffende blokgebied liggen. Dat dit niet juist is wordt in hoofdstuk 4 aangetoond. Wat ook wel wordt gedaan is het volume onder de zwaartekrachtfoutcovariantiefunctie $\sigma_{\overline{\Delta g} \overline{\Delta g'}}$ berekenen, en dit foutvolume σ_{vol}^2 daarna beschouwen als foutvariantie. Dat wil zeggen dat de correlaties niet helemaal worden weggelaten, maar dat de foutberekening (2.66) wordt vereenvoudigd tot (2.67). Het foutvolume bij gemiddelde blokwaarden wordt berekend volgens

$$\sigma_{\text{vol},i}^2 = \sum_{i'=1}^I \sigma_{\overline{\Delta g_i} \overline{\Delta g_{i'}}} . \quad (2.68)$$

Het foutvolume speelt een belangrijke rol bij analytische en spectrale technieken. Bij numerieke berekeningen in het ruimtedomein is het echter niet noodzakelijk naar deze vereenvoudiging over te stappen.

In hoofdstuk 4 zullen de foutvarianties en foutcovarianties en de foutvolumes van gemiddelde zwaartekrachtblokwaarden worden berekend. In hoofdstuk 6 wordt dan bekeken wat het effect van de genoemde benaderingen is voor de geoïdefout.

Bij het zoeken naar optimale geoïdeberekeningstechnieken in theoretisch geïntegreerde studies (bijvoorbeeld Sjöberg, 1986; Strang van Hees, 1986; Fan, 1989; Smeets, 1992) wordt niet uitgegaan van de praktijkformule (2.66) maar van de continue integratie

$$\sigma_{3,N}^2 = \left(\frac{R}{4\pi\gamma} \right)^2 \int_{\sigma} \int_{\sigma} St(\psi_{P_i}) St(\psi_{P_{i'}}) \sigma_{\Delta g_i \Delta g_{i'}} d\sigma' d\sigma . \quad (2.69)$$

Strang van Hees gaat met deze formule aan de slag, maar door anderen wordt de aanname gedaan dat de foutcovarianties van de zwaartekrachtanomalieën homogeen en

isotroop zijn (voor ieder punt hetzelfde, en de correlatie is in alle richtingen gelijk). Daardoor kan worden geschreven

$$\sigma_{\Delta g_i \Delta g_{i'}} = \sum_{n=2}^{\infty} d_n P_n(\cos \psi_{i i'}) . \quad (2.70)$$

De fout in de geoïde ten gevolge van de gebruikte zwaartekrachtdata in het binnengebied met deze fout wordt dan

$$\sigma_{3,N}^2 = \left(\frac{R}{2\gamma}\right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{n-1} - Q_n(\psi_o)\right)^2 d_n . \quad (2.71)$$

Sjöberg (1986) heeft een model ontwikkeld voor d_n , dat wordt gebruikt bij de berekening van deze fout. Het is echter niet erg realistisch om met zo'n model te werken, omdat de foutcovarianties niet homogeen en isotroop zijn. De foutvariantie hangt sterk af van de gegeven punt dichtheid in een gebied, welke sterk varieert per gebied. Bovendien is de meetruis van de gegeven zwaartekrachtwaarden, welke worden opgenomen in dit model, ook niet gelijk voor elk gebied. Daarnaast is het ook nog erg moeilijk om het model goed te laten aansluiten bij gevonden empirische waarden. Het is dus beter om een ruimtedomein aanpak te volgen, waarbij (2.66) en (2.67) worden gebruikt.

Discretisatiefout

Ten slotte wordt de vierde fout in de geoïde ten gevolge van het gebruik van zwaartekrachtdata, besproken. Het betreft de discretisatiefout. Er zijn eigenlijk twee soorten discretisatiefout. Ten eerste wordt een fout gemaakt doordat de beschikbare zwaartekrachtdata bemonsterd gegeven zijn, dat betekent dat er alleen discrete meetwaarden bekend zijn. Het zwaartekracht signaal zal echter ook voor frequenties die hoger zijn dan die van de bemonsteringsafstand nog energie bevatten. Als de zwaartekracht dataset dicht genoeg is gemeten, dan zal deze amplitude echter zeer klein zijn en verwaarloosbaar voor de geoïdeberekening. Deze fout wordt in de literatuur (Heck&Grüniger, 1983; Sjöberg, 1986; Fan, 1989; Smeets, 1992) dan ook meestal niet genoemd. De hoge frequenties (kleine golflengten) van het zwaartekracht signaal worden met name bepaald door topografievariaties. In de geoïdeberekeningspraktijk worden de gemeten zwaartekrachtwaarden gereduceerd voor de topografievariatie-effecten. Voor Nederland is het niet nodig deze reductiecorrecties aan te brengen omdat de topografie in Nederland verwaarloosbaar klein is. Hierop wordt in de hoofdstukken 5 en 7 nog verder ingegaan.

De tweede discretisatiefout die wordt geïntroduceerd is doordat met gemiddelde waarden wordt gewerkt. Bij numerieke integratie wordt gewerkt met gemiddelde waarden, waaruit de frequenties hoger dan de blok grootte zijn verwijderd. Deze blok grootte is meestal groter dan de afstand tussen de puntwaarden. Deze fout wordt vaak beschreven met een formulering die niet helemaal juist is (zie bijvoorbeeld Heck&Grüniger, 1983; Sjöberg&Stocki, 1986). Er wordt verondersteld dat een continue zwaartekracht functie beschikbaar is waarop een lopend gemiddelde (zie appendix B) is toegepast. De fout in de geoïde door het gebruik van deze glad gemaakte (*smoothed*) functie in plaats van

de echte functie is

$$\begin{aligned}\varepsilon_{N(P)} &= \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma_o} St(\psi) \left(\Delta g(Q) - \Delta g_\beta(Q) \right) d\sigma \\ &= \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{n-1} - Q_n(\psi_o) \right) \Delta g_n (1 - \beta_n).\end{aligned}\quad (2.72)$$

De foutvariantie wordt dan

$$\sigma_{4,N(P)}^2 = \left(\frac{R}{2\gamma} \right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{n-1} - Q_n(\psi_o) \right)^2 c_n (1 - \beta_n)^2. \quad (2.73)$$

Deze beschrijving is niet helemaal juist omdat niet wordt geïntegreerd over een glad gemaakte functie, maar over een signaal dat bestaat uit blokwaarden. Wordt echter de geoïde alleen in de middelpunten van de blokgebieden berekend, dan is het een redelijke benadering. Als op deze manier de fout wordt berekend dan blijkt dat de fout wordt veroorzaakt door het blokgebied waarin het berekeningspunt zich bevindt en de directe buurblokken. Het is een zeer lokaal effect. Dat kan ook eenvoudig worden ingezien als wordt gekeken naar het aantal subblokken dat nodig is voor de berekening van de Stokes gewichten (zie tabel 2.1). Doordat voor de korte afstanden de Stokes functie snel verandert is het daar van belang dat de echte zwaartekrachtwaarde wordt gebruikt en niet een glad gemaakte functie. Omdat het een lokaal effect is is het niet juist om deze fout te berekenen met een globaal model voor de signaalgraadvarianties c_n , zoals in (2.73). De lokale afwijkingen hiervan kunnen zeer groot zijn, zodat een andere beschrijving nodig is voor de discretisatiefout.

Om de maximale discretisatiefout te vinden moet in de zwaartekrachtdataset het blokgebied worden gevonden waar de zwaartekrachtwaarden de grootste amplitude hebben op een kleine golflengte. Dit betekent een maximale of minimale variatie in de zwaartekrachtwaarde, meestal in de vorm van een 'bergtop' of van een 'bergrug'. Voor dit gebied wordt voor de blokgebieden verschillende grootten gekozen en gekeken of dit een effect heeft op de berekende geoïdehoogte. De grootst mogelijke blok grootte wordt gekozen waarvoor nog geen significante geoïdefout wordt gemaakt, als blok grootte voor het gehele binnengebied.

Conclusies

De fout in de geoïde ten gevolge van de gebruikte data kan schematisch worden weergegeven zoals is gedaan in tabel 2.2. Voor de eerste twee fouten in de geoïde is een eenvoudige spectrale beschrijving mogelijk. Voor $\sigma_{3,N}$ wordt dit ook wel gedaan, maar die komt niet overeen met de praktische berekeningsmethode die hier zal worden gehanteerd. Ook voor de discretisatiefout is een spectrale beschrijving niet voldoende voor de lokale geoïdeberekening.

De fout ten gevolge van de data in het buitengebied is van de orde 10-20 cm voor relatieve geoïdehoogten over een afstand tot 100 km, zoals is getoond met een voorbeeld. In de hoofdstukken 4 en 6 zal verder worden ingegaan op de twee andere fouten. De fout ten gevolge van de buitengebieddata kan echter worden verkleind. Dit zal nu worden bekeken.

Tabel 2.2 Schematisch overzicht van de fouten in de geoïde ten gevolge van de gebruikte of juist niet gebruikte data.

	Toestaan	Weglaten
Buitengebied	Ruis $\overline{\Delta C_{nm}}$ $\sigma_{1,N}$ (2.61)	Afbreekfout $\sigma_{2,N}$ (2.64)
Binnengebied	Ruis $\overline{\Delta g_i}$ $\sigma_{3,N}$ (2.66)	Discretisatiefout $\sigma_{4,N}$ (2.73)

2.6 Kernfunctiemodificaties

In literatuur over geoïdeberekening wordt veel aandacht geschonken aan zogenaamde kernfunctiemodificaties (zie bijvoorbeeld Molodenskii e.a., 1962; Wong&Gore, 1969; Meissl, 1971; Wenzel, 1985; Heck&Grüniger, 1987; Fan, 1989; Smeets, 1992; Featherstone, 1992). Oorspronkelijk richtte de aandacht zich op het verkleinen van de afbreekfout (zie ook Molodenskii e.a., 1962, p.152 en verder), maar later werden kernfuncties berekend die combinaties van fouten of de totale fout minimaliseren. De kernfunctiemodificaties kunnen worden gescheiden naar deterministische en stochastische modificaties (Heck&Grüniger, 1987). Bij de eerste wordt geen, bij de tweede wordt wel gebruik gemaakt van de fouteninformatie van de data. Deze fouteninformatie is vaak niet correct of compleet, zodat deze fout in de fouteninformatie een dubbel effect heeft, zowel bij de modellering als de foutberekening zelf. Twee belangrijke fouten in de foutbeschrijving worden straks gegeven. Voor een beschrijving van vrijwel alle kernfunctiemodificaties die worden toegepast wordt verwezen naar (Smeets, 1992). Hier zullen slechts enkele deterministische kernfunctiemodificaties worden beschreven.

In dit proefschrift zal het onderwerp van kernfunctiemodificaties op een andere manier worden geïntroduceerd dan in de literatuur gebruikelijk is. Hierbij wordt toegewerkt naar een meer praktisch inzichtelijke beschrijving dan in voornoemde literatuur. Het is namelijk van belang om een goede afweging te maken van de fysische relevantie van de kernfunctiemodificatie.

In paragraaf 2.2 is behandeld hoe de twee beschikbare datasets met zwaartekrachtinformatie, een globaal geopotentiaalmodel en een lokale zwaartekrachtdataset, gecombineerd kunnen worden gebruikt om de geoïde te berekenen. De combinatieoplossing, gezien volgens methode B, maakt gebruik van de datasets door een eenvoudige scheiding van de aarde in binnengebied (lokale dataset) en het buitengebied (globaal geopotentiaalmodel). Er zijn echter ook meer geavanceerde combinaties mogelijk. We beginnen met het geval dat er twee volledige zwaartekrachtdatasets (d.i. alle frequenties beschrijvend en de hele aarde bedekkend) zijn gegeven. Dan kan een willekeurige combinatie van deze twee sets worden gebruikt om één set te maken en daarmee de geoïde te berekenen. Dit kan ook algemener worden beschreven, door de Stokes kernfunctie te

verdelen over de twee volledige datasets. Dit is mogelijk omdat de Stokes integraal een lineaire operator is.

$$N(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} St_1(\psi) \Delta g_1 d\sigma + \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} St_2(\psi) \Delta g_2 d\sigma, \quad (2.74)$$

- met Δg_1 de éne dataset,
- St_1 het deel van St dat aan Δg_1 wordt toegeedeeld,
- Δg_2 de andere volledige dataset,
- St_2 het deel van St dat aan Δg_2 wordt toegeedeeld,
- waarbij verder moet gelden $St = St_1 + St_2$.

Als de beide zwaartekrachtdatasets Δg_1 en Δg_2 allebei volledig en mondiaal (globaal) zijn gegeven is een willekeurige verdeling van St mogelijk. In de praktijk zijn de beide datasets niet allebei volledig en mondiaal gegeven. De eerste dataset is dat wel. Deze bestaat uit het geopotentiaal model \bar{C}_{nm} met foutenmaat ε_n voor $n \leq N_{max}$ en $\Delta g = 0$ en foutenmaat c_n voor $n > N_{max}$. Deze dataset geeft mondiale bedekking met zwaartekrachtinformatie en bevat alle frequenties. De andere dataset Δg_2 is de lokale zwaartekrachtdataset met foutenmaat $\sigma_{\Delta g \Delta g'}$. Deze dataset bevat wel alle frequenties maar is alleen gegeven op een klein deel van de aarde $\psi < \psi_o$. Dit betekent dat de verdeling van de Stokes functie St voor het gebied $\psi > \psi_o$ niet willekeurig mag worden gekozen, maar is

$$\left. \begin{aligned} St_1(\psi) &= St(\psi) \\ St_2(\psi) &= 0 \end{aligned} \right\} \psi > \psi_o. \quad (2.75)$$

Voor het binnengebied, $\psi < \psi_o$ kan Stokes functie St worden gesplitst in twee delen St_1 en St_2 waarbij alleen de voorwaarde is dat de som van de deelfuncties weer de volledige Stokes functie oplevert.

De verdeling van Stokes functie wordt in de literatuur kernfunctiemodificatie genoemd. Er is dan sprake van een modificatie ten opzichte van het bekende geval van de normale combinatieoplossing (paragraaf 2.2). Het doel van een kernfunctiemodificatie is om optimaal gebruik te maken van de beschikbare datasets, dus een zo goed mogelijke geoïde te krijgen. Twee aspecten zijn dan van belang. Hoe wordt de geoïde berekend uit de beschikbare data (fysische relevantie) en hoe groot wordt de formele geoïdefout?

Bij een bepaalde kernfunctiemodificatie horen ook weer spectrale coëfficiënten zoals de Molodenskii coëfficiënten Q_n (2.15) die bij de gewone combinatieoplossing worden gebruikt. Algemeen geldt

$$Q_n^*(\psi_o) = \frac{2n+1}{2} \int_{\psi=0}^{\pi} St_1^*(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi, \quad (2.76)$$

waarin St_1^* (het deel van) de Stokes kernfunctie is die wordt gebruikt voor de berekening van de bijdrage van Δg_1 welke bestaat uit Δg^{ggm} en $\Delta g = 0$. Het * geeft aan dat nog geen specifieke keuze voor St_1^* is gedaan.

Bedacht moet worden dat deze data nu niet meer alleen in het buitengebied worden gebruikt, zoals bij de normale combinatiemethode uit paragraaf 2.2, maar dat de data over het gehele aardoppervlak worden gebruikt. Er is geen sprake meer van buitengebied.

De inverse relatie van (2.76) is

$$St_1^*(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} Q_n^*(\psi_o) P_n(\cos \psi). \quad (2.77)$$

Als de spectrale gewichten voor een bepaalde kernfunctiemodificatie worden gedefinieerd als

$$w_n^* = \left(\frac{n-1}{2} Q_n^*(\psi_o) \right) \quad (2.78)$$

dan worden de beide delen van Stokes functie voor de twee datasets beschreven door

$$St_1^*(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \cdot w_n^* \cdot P_n(\cos \psi) \quad (2.79)$$

$$St_2^*(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \cdot (1 - w_n^*) \cdot P_n(\cos \psi)$$

De sommaties beginnen nu niet bij graad 2 maar bij 0, omdat de spectrale gewichten van $n = 0, 1$ na de gewichtsverdeling niet persé nul hoeven te zijn. De som van de spectrale gewichten van de twee dealkernfuncties $St_1^*(\psi)$ en $St_2^*(\psi)$ moet wel weer nul zijn voor $n < 2$. Het totale gewicht is 1 voor $n \geq 2$ en 0 voor $n = 0, 1$.

Figuur 2.14 geeft weer hoe bij de gewone combinatiemethode Stokes functie wordt verdeeld over de twee datasets. In figuur 2.16 staan de spectrale gewichten w_n die $St_1(\psi)$ en $St_2(\psi)$ opleveren.

Eén van de eerst toegepaste deterministische kernfunctiemodificaties is de Meissl-kernfunctie (Meissl, 1971). Bij de Meissl-modificatie wordt de totale kernfunctie verdeeld over beide datasets zoals aangegeven in figuur 2.15. Er geldt

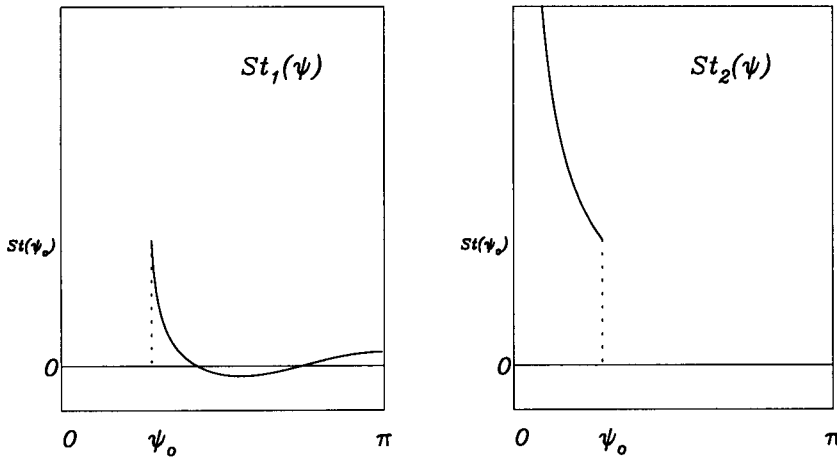
$$St_1^M(\psi) = \begin{cases} St(\psi_o) & 0 \leq \psi \leq \psi_o \\ St(\psi) & \psi_o < \psi \leq \pi \end{cases} \quad (2.80)$$

$$St_2^M(\psi) = St(\psi) - St_1^M(\psi) = \begin{cases} St(\psi) - St(\psi_o) & 0 \leq \psi \leq \psi_o \\ 0 & \psi_o < \psi \leq \pi \end{cases}.$$

Wanneer deze twee kernfuncties, die samen weer de volledige Stokes functie opleveren, spectraal worden uitgedrukt, is dat

$$St_1^M(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} w_n^M P_n(\cos \psi) \quad (2.81)$$

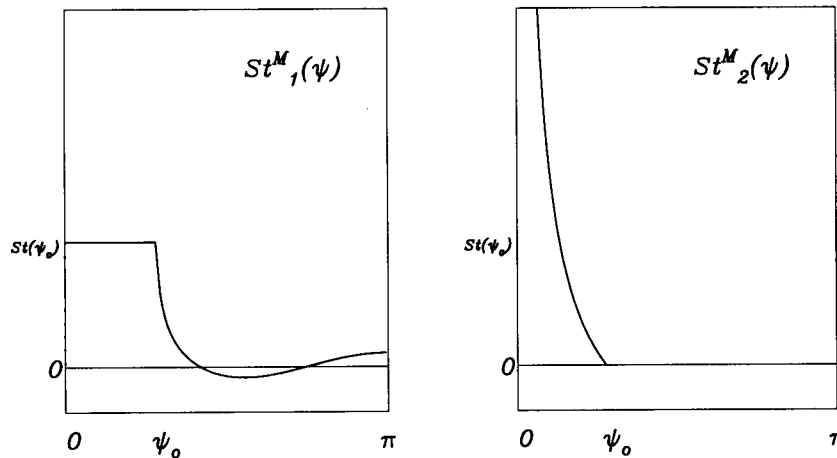
$$St_2^M(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} (1 - w_n^M) P_n(\cos \psi).$$



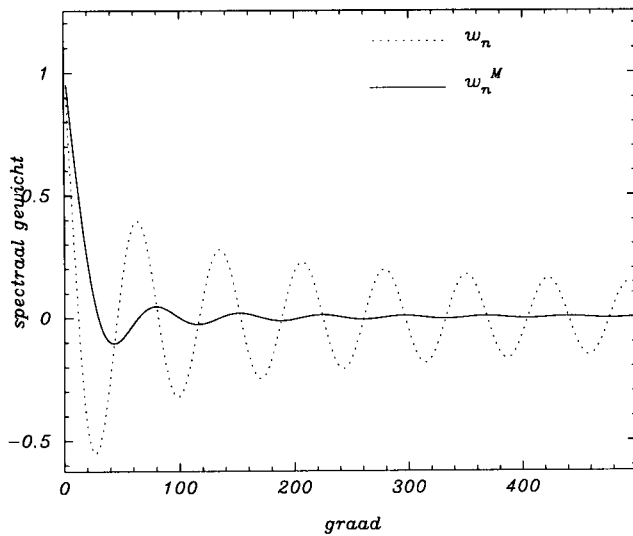
Figuur 2.14 Verdeling van Stokes functie over $\Delta g_1 = \Delta g^{ggm}$ en Δg_2 bij de normale combinatiemethode.

In figuur 2.16 worden de spectrale gewichten w_n en w_n^M gegeven voor $\psi_o = 5^\circ$. Deze gewichten geven aan welk deel van de Stokes functie in het spectrum aan de geopotentialcoëfficiënten (en $\Delta g_n = 0$ voor $n > N_{max}$) wordt toegekend.

In vergelijking met de gewone combinatieoplossing (met $Q_n(\psi_o)$) krijgen de lage graden een groter deel van het totale gewicht bij de Meissl-modificatie (met $Q_n^M(\psi_o)$). Dit is beter, want de geopotentialcoëfficiënten kunnen deze lage frequenties beter beschrijven dan de lokale dataset in het binnengebied. Bij de gewone combinatieoplossing wordt vanaf graad 6 al minder dan de helft van het gewicht aan de geopotentialcoëfficiënten gegeven, terwijl dit bij de Meissl-modificatie vanaf graad 12 is. Met een binnengebied van ongeveer 10° doorsnee moeten golflengten van respectievelijk 60° en 30° en kor-



Figuur 2.15 Verdeling van Stokes functie over $\Delta g_1 = \Delta g^{ggm}$ en Δg_2 bij de Meissl-modificatie.



Figuur 2.16 Spectrale gewichten w_n en w_n^M van de gewone combinatieoplossing en de Meisslmethode voor $\psi_o = 5^\circ$.

ter worden beschreven. Een tweede opvallend verschil is dat de amplitudes van het golfpatroon in het spectrum bij de hogere graden veel kleiner zijn bij Meissl- dan bij Molodenskii-coëfficiënten. Dit betekent dat de coëfficiënten $(Q_n^M(\psi_o))^2$ in de berekening van de afbreekfout (2.64) veel kleiner zullen zijn waardoor de afbreekfout ook kleiner zal zijn. Het betekent wel dat de gewichten $(\frac{2}{n-1} - Q_n^M(\psi_o))^2$ van de fout van de binnengebieddata (2.71) voor sommige graden groter zal worden. Echter, dit is relatief gezien een heel kleine verandering, terwijl de verandering van de w_n naar w_n^M -gewichten relatief gezien heel groot is. Een wiskundige reden voor het verkleinen van de afbreekfout is dat de grote sprong die in de kernfunctie $St_1(\psi)$ optreedt bij ψ_o grote amplitudes voor de hoge frequenties veroorzaakt. Omdat de Legendrepolynomen continue functies zijn, convergeert de som ervan traag naar de discontinue functie (Smeets, 1992). Bij de Meissl-kernfunctie $St_1^M(\psi)$ is deze discontinuïteit er niet, waardoor de hoge frequenties veel sneller uitdempen. Voor Molodenskii en Meissl-coëfficiënten verloopt de convergentie van de spectrale coëfficiënten naar nul met respectievelijk $1/n$ en $1/n^2$ (Meissl, 1971; Smeets, 1992). De verkleining van de afbreekfout is in het spectrum duidelijk te herkennen door de verkleining van de amplitudes. In het ruimtedomein is dit minder inzichtelijk. Wanneer de foutvoortplanting van de ruis van de geopotentialcoëfficiënten en de afbreekfout wordt bekeken in het ruimtedomein (op de bol), dan is er een deel van het boloppervlak waar bij de gewone combinatieoplossing de Stokes functie de waarde nul heeft. Dit is het binnengebied. Bij de gemodificeerde kernfunctie van Meissl is de waarde in het binnengebied niet nul. Men zou daarom kunnen verwachten dat de voortgeplante fout groter wordt bij de Meissl-kernfunctie. Dit is ook het geval als de fouten die worden voortgeplant ongecorrleerd zijn en dezelfde variantiewaarde hebben (witte ruis). In dit geval zou het foutenspectrum een witte ruis-spectrum zijn. In werkelijkheid is het foutenspectrum geen witte ruis-spectrum maar een aflopend spectrum met de graad n , en de fout in het ruimtedomein is dan een gecorrleerde fout. Voor dat geval is de Meissl-kernfunctie wel gunstiger dan de Molodenskii-kernfunctie. Dus door

de verdeling van het foutsignaal over de graden van het spectrum is het gunstiger als de kernfunctie niet de waarde nul heeft in het binnengebied maar een andere waarde.

De verkleining van de afbreekfout maakt de Meissl-kernfunctiemodificatie aantrekkelijk, terwijl de verdeling van de spectrale gewichten $\frac{2}{n-1}$ over de datasets een logischer gebruik daarvan oplevert omdat voor de lage graden meer gewicht aan het geopotentialmodel wordt toegekend. In (Smeets, 1992) kan ook worden gevonden dat de Meissl-modificatie resultaten geeft die bijna zo goed zijn als de best haalbare (stochastische methode).

Andere deterministische kernfunctiemodificaties zijn de Wong&Gore-modificatie en de gecombineerde Meissl/Wong&Gore-modificatie. De Wong&Gore-modificatie houdt in dat niet een constante waarde $St(\psi_o)$ wordt gebruikt in het binnengebied voor $St_1(\psi)$, maar de lage graden van de Stokes functie. Dit wordt gegeven door $\sum_{n=2}^L \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi)$ waarmee $St_1^{WG}(\psi)$ en $St_2^{WG}(\psi)$ worden verkregen. Grofweg kan worden gezegd dat de gewichten tot graad L dan voornamelijk aan de geopotentialdata worden toegekend. Deze methode heeft als nadeel dat bij de overgang van binnengebied naar buitengebied weer een discontinuïteit optreedt. De combinatie met de Meissl-modificatie (Heck&Grüniger, 1987) betekent dan dat deze continuïteit ook nog wordt weggewerkt, zodat

$$St_1^{MWG}(\psi) = \begin{cases} \sum_{n=2}^L \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) + St(\psi_o) & 0 \leq \psi \leq \psi_o \\ - \sum_{n=2}^L \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi_o) & \\ St(\psi) & \psi_o < \psi \leq \pi \end{cases} \quad (2.82)$$

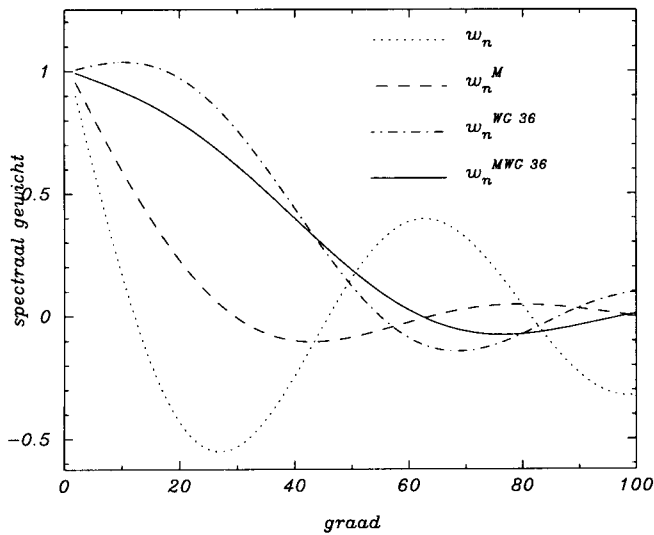
$$St_2^{MWG}(\psi) = \begin{cases} St(\psi) - \sum_{n=2}^L \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) - \\ \left(St(\psi_o) - \sum_{n=2}^L \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi_o) \right) & 0 \leq \psi \leq \psi_o \\ 0 & \psi_o < \psi \leq \pi . \end{cases}$$

Wanneer deze twee kernfuncties, die samen weer de volledige Stokes functie opleveren, spectraal worden uitgedrukt, is dat

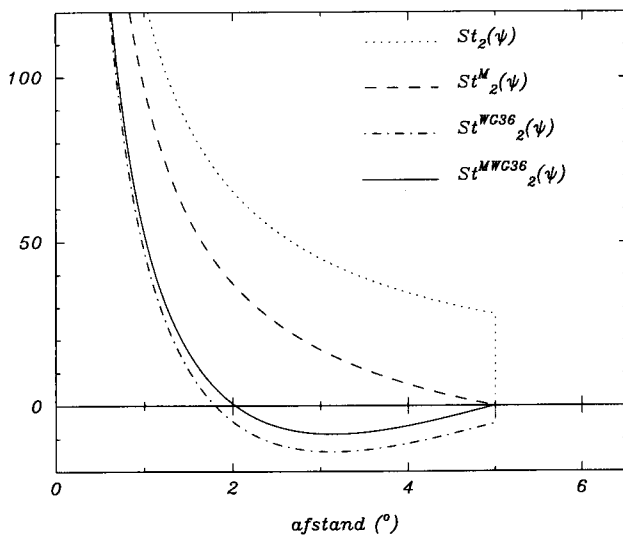
$$St_1^{MWG}(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} w_n^{MWG} P_n(\cos \psi) \quad (2.83)$$

$$St_2^{MWG}(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} (1 - w_n^{MWG}) P_n(\cos \psi) .$$

De keuze van L zal dadelijk worden besproken. Figuur 2.17 laat zowel de w_n , w_n^M , w_n^{WG} als de w_n^{MWG} -coëfficiënten zien voor $\psi_o = 5^\circ$ en $L = 36$ welke voor het voorbeeld



Figuur 2.17 Spectrale gewichten w_n , w_n^M , w_n^{WG} en w_n^{MWC} , voor $\psi = 5.0^\circ$ en $L = 36$ voor w_n^{WG} en w_n^{MWC} .



Figuur 2.18 De kernfuncties $St_2^*(\psi)$ bij de Q_n^* -coëfficiënten uit figuur 2.17.

willekeurig zijn gekozen. In deze figuur is meer ingezoomd op de lage graden dan in figuur 2.16. Figuur 2.18 laat de bijbehorende kernfuncties voor het binnengebied zien.

Uit deze figuren blijkt dat voor de Wong&Gore en Meissl/Wong&Gore methoden, net als bij de Meissl-methode, de spectrale gewichten voor grote waarden van n (bijvoorbeeld $n > 60$), veel kleiner zijn dan bij de gewone combinatiemethode. De afbreekfout zal voor deze twee kernfunctiemodificaties klein zijn. Bovendien ziet men dat voor de waarde van $L = 36$, de twee methoden aan lage graden tot aan L nog meer gewicht toekennen aan het gebruikte geopotiaalmodel, en minder aan de binnengebied da-

taset, dan de Meissl-kernfunctiemodificatie. Men ziet ook dat de w_n^{WG} -gewichten tot aan L groter zijn dan 0.5, en daar voorbij kleiner.

Bij de stochastische methoden wordt de spectrale Stokes functie $\frac{2}{n-1}$ verdeeld op basis van de spectrale foutbeschrijving van de gebruikte datasets. Dit zijn ε_n en c_n voor de geopotentialdataset met nulwaarden voor $n > N_{max}$, en foutgraadvarianties d_n voor de binnengebieddata (2.70). Belangrijke nadelen hierbij zijn dat de ε_n en d_n moeilijk of niet goed te berekenen zijn. De ε_n worden bepaald uit geschaalde $\sigma_{\Delta C_{nm}}^2$ waarbij de correlaties tussen coëfficiënten buiten beschouwing worden gelaten. Zoals al genoemd op bladzijde 43 kan het verwaarlozen van deze correlaties effecten tot 50% hebben voor verschillende toepassingen. Voor de foutgraadvarianties van de binnengebieddata d_n geldt dat ze niet goed kunnen worden bepaald en dat meestal een model wordt aangenomen voor de d_n , dat niet goed aansluit bij de echte fout. Deze fout is zelf al moeilijk te bepalen, en hangt af van de lokale punt dichtheid, kwaliteit van de metingen en het lokale zwaartekrachtssignaal (zie hoofdstuk 4). De beschrijving met een algemeen model is dus niet correct. Het op basis van deze zwakke uitgangspunten optimaliseren van de kernfunctieverdeling lijkt daarom onverstandig. De verdeling kan beter uitgevoerd worden op basis van de binnengebiedgrootte. De grootte van het binnengebied ψ_o bepaalt namelijk voor een belangrijk deel welke frequenties wel en niet kunnen worden bepaald. Dit zal in de volgende paragraaf worden bekeken. In hoofdstuk 6 bij de geoïdeberekening, zullen alleen tests worden uitgevoerd met de deterministische kernfunctiemodificaties.

Nu zal nog worden aangetoond dat de geoïdeberekening die wordt beschreven als een methode B-berekening altijd via een methode A-berekening kan worden geëvalueerd. De verdeling van de Stokes functie over de twee datasets zoals eerder aangegeven, levert een algemene uitdrukking volgens methode B op

$$\begin{aligned}
 N(P) &= N_1^B(P) + N_2^B(P) \tag{2.84} \\
 &= \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} St_1^*(\psi) \Delta g^{ggm}(P) d\sigma + \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} (St(\psi) - St_1^*(\psi)) \Delta g(P) d\sigma \\
 &= \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{N_{max}} Q_n^*(\psi_o) \Delta g_n^{ggm}(P) + \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{n-1} - Q_n^*(\psi_o) \right) \Delta g_n(P) \\
 &= \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{N_{max}} Q_n^*(\psi_o) \Delta g_n^{ggm}(P) + \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{2}{n-1} - Q_n^*(\psi_o) \right) \Delta g_n(P) \\
 &\quad + \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=N_{max}+1}^{\infty} \left(\frac{2}{n-1} - Q_n^*(\psi_o) \right) \Delta g_n(P) \\
 &= \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{N_{max}} \frac{2}{n-1} \Delta g_n^{ggm}(P) \\
 &\quad + \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{2}{n-1} - Q_n^*(\psi_o) \right) (\Delta g_n(P) - \Delta g_n^{ggm}(P))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=N_{max}+1}^{\infty} \left(\frac{2}{n-1} - Q_n^*(\psi_o) \right) (\Delta g_n(P) - \Delta g_n^{ggm}(P)) \\
& = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{N_{max}} \frac{2}{n-1} \Delta g_n^{ggm}(P) \\
& \quad + \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{n-1} - Q_n^*(\psi_o) \right) (\Delta g_n(P) - \Delta g_n^{ggm}(P)) \\
& = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{N_{max}} \frac{2}{n-1} \Delta g_n^{ggm}(P) + \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} (St(\psi) - St_1^*(\psi)) (\Delta g - \Delta g^{ggm}) d\sigma .
\end{aligned}$$

Deze laatste regel is precies de manier waarop volgens methode A de berekening wordt uitgevoerd. Voor elke kernfunctiemodificatie waarbij in het buitengebied $St(\psi)$ voor Δg^{ggm} wordt gebruikt en in het binnengebied een willekeurige verdeling van $St(\psi)$ over de twee datasets, kan de evaluatie plaats vinden volgens methode A. Dit geldt ook voor de gewone combinatieoplossing met Molodenskii coëfficiënten (zie paragraaf 2.2). Het integratiegebied voor het tweede rechterlid kan worden beperkt tot het binnengebied omdat de kernfunctie daarbuiten de waarde nul heeft.

2.7 Keuze van een kernfunctiemodificatie

Nu de beschikbare deterministische kernfunctiemodificaties bekend zijn dient een keuze te worden gemaakt welke modificatie te gebruiken. Uit de beschrijving van de kernfunctiemodificaties is duidelijk geworden dat er belangrijke verschillen zijn. Het verkleinen van de amplitudes van de $Q_n^*(\psi_o)$ voor hogere graden n is in ieder geval een belangrijke verbetering doordat de afbreekfout daardoor kleiner wordt. Men kan dan echter nog de keuze tussen Meissl ($L = 1$), Wong&Gore of gecombineerd Meissl/Wong&Gore (L) maken. De Wong&Gore kernfunctiemodificatie is minder interessant dan de twee andere, omdat er een sprong voorkomt bij de binnengebiedrand ψ_o , waardoor de $Q_n^{WG}(\psi_o)$ -coëfficiënten minder snel naar nul gaan voor grotere waarden van n en dus een grotere afbreekfout oplevert dan de Meissl-oplossingen. Als L groter dan 6 wordt gekozen voor $\psi_o = 5^\circ$, krijgen de graden 2 tot L veel bijdrage van de geopotentialmodeldata en weinig van de binnengebieddata voor (de Wong&Gore en) de gecombineerde Meissl/Wong&Gore kernfunctie. Bij de Meissl-kernfunctie krijgen zelfs de lage graden van het geoïderesultaat al snel voornamelijk bijdrage uit het binnengebied, ook al is dit minder dan bij de Molodenskii-coëfficiënten Q_n . De gecombineerde Meissl/Wong&Gore-kernfunctiemodificatie lijkt daarom de beste om te gebruiken. Er moet dan nog een keuze voor L worden gemaakt. De vraag die beantwoord moet worden, om te kunnen kiezen voor een bepaalde L is: hoe goed is de lage-graden-bijdrage te bepalen uit de binnengebieddata?

Eén mogelijk antwoord volgt uit de veel gebruikte vuistregel $n = \frac{360^\circ}{\lambda}$. Voor $\psi_o = 5^\circ$ kan dan worden gesteld $n \approx \frac{360^\circ}{10^\circ} = 36$. Volgens deze vuistregel en het sampling-theorema voor platte-vlak functies (zie bijvoorbeeld Lynn, 1973) kunnen uit een gebied van 10°

doorsnee geen frequenties lager dan $n = 36$ worden beschreven. L dient dan minstens gelijk aan 36 te worden gekozen.

Een andere manier om iets te zeggen over de keuze van L volgt hieronder. De zwaartekrachtcomponent voor een graad n wordt berekend met (A.6)

$$\Delta g_n(P) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\sigma} \Delta g(Q) P_n(\cos \psi) d\sigma . \quad (2.85)$$

Dit is een mondiale integratie. Wanneer alleen data beschikbaar zijn in een cirkelvormig binnengebied tot aan ψ_o dan zou kunnen worden berekend

$$\Delta g_n^{\sigma_o}(P) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\sigma_o} \Delta g(Q) P_n(\cos \psi) d\sigma . \quad (2.86)$$

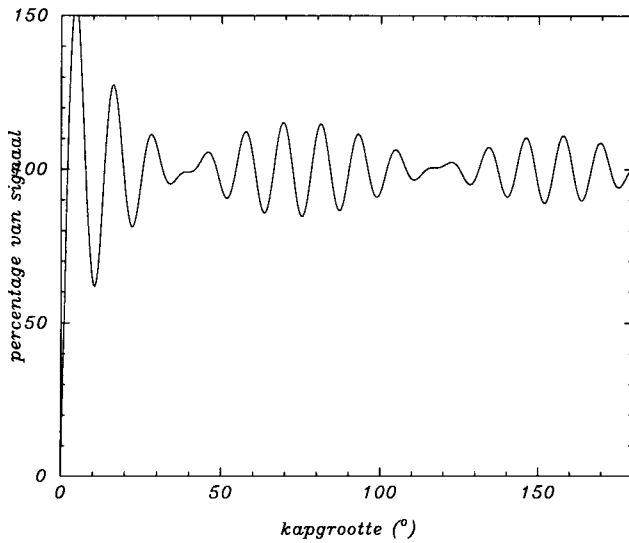
Om een indruk te krijgen hoe goed de waarde van $\Delta g_n(P)$ kan worden bepaald uit een binnengebied zijn waarden berekend voor

$$\frac{\Delta g_n^{\sigma_o}(P)}{\Delta g_n(P)} 100\% , \quad (2.87)$$

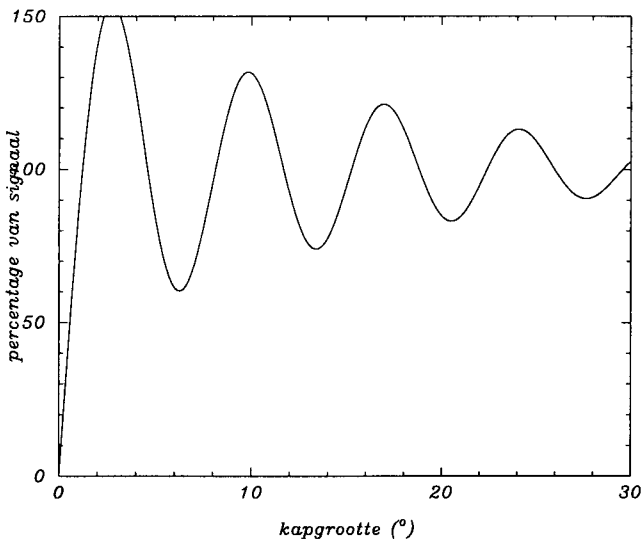
op basis van de coëfficiënten van het globale geopotentiaalmodel OSU91A. Het resultaat is weergegeven in de figuren 2.19 en 2.20 voor $n = 30$ en $n = 50$. De amplitude hangt af van de lokatie van het berekeningspunt, de vorm van de grafiek echter niet. Voor $n = 30$ kan worden gezien dat voor $\psi_o = 2^\circ$ geldt dat $\Delta g_n^{\sigma_o}(P) = \Delta g_n(P)$. Dit betekent dat $Q_{30}(2^\circ) = 0$. Voor $n = 50$ is dat bij $\psi_o = 1.75^\circ$. In dit voorbeeld is sprake van een kunstmatige berekening, omdat $\Delta g_n(P)$ al bekend is (uit OSU91A). In werkelijkheid is dat niet zo, maar aan de figuren 2.19 en 2.20 kan worden afgelezen dat voorbij de eerste nuldoorgang nog slechts variaties tot maximaal 50% voorkomen van de uiteindelijke waarde. De binnengebiedgrootten bij de tweede nuldoorgang voor $n = 30$ en $n = 50$ zijn respectievelijk $\psi_o = 7.6^\circ$ en $\psi_o = 4.6^\circ$. Voorbij de tweede nuldoorgang komen nog maar afwijkingen van de uiteindelijke waarde voor van maximaal 30%. De data in het binnengebied zijn dus verreweg het belangrijkste bij de berekening van $\Delta g_n(P)$. Als het integratiegebied (binnengebied) wordt vergroot tot een volgende nuldoorgang wordt in dit kunstmatige geval weer precies $\Delta g_n(P)$ verkregen. In werkelijkheid zal een iets afwijkende, maar meer betrouwbare waarde worden gevonden. Hoe groter ψ_o wordt gekozen, hoe kleiner de afwijkingen van $\Delta g_n(P)$ (100%) worden, en ook hoe betrouwbaarder de waarde van $\Delta g_n^{\sigma_o}(P)$ voor $\Delta g_n(P)$ wordt.

Om terug te komen op het oorspronkelijke probleem, welke $\Delta g_n(P)$ kan worden bepaald uit een binnengebied ψ_o , dient een keuze te worden gemaakt met welke ψ_o een voldoende betrouwbare waarde van $\Delta g_n(P)$ wordt gevonden. Om nog wat meer inzicht te verkrijgen hoe het signaal voor een bepaalde graad n er uit ziet in een binnengebied van 5° , zijn uit de geopotentiaalcoëfficiënten voor een aantal bereiken $\{n|n_1 \leq n \leq n_2\}$ van OSU91A de zwaartekrachtanomalieën berekend voor een deel van Europa. De figuren 2.21-2.24 laten het resultaat zien.

In deze figuren zien we dat voor $n < 20$ het signaal binnen een gebied met een straal van 5° zeer vlak verloopt. Er is nauwelijks variatie binnen de gebiedsgrootte. Het zal



Figuur 2.19 Percentage van $\Delta g_{30}(P)$ voor verschillende binnengebiedgrootten, berekend op basis van OSU91A.

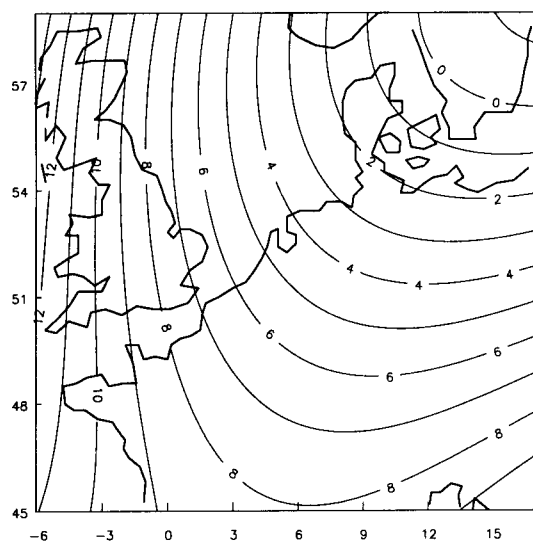


Figuur 2.20 Percentage van $\Delta g_{50}(P)$ voor verschillende binnengebiedgrootten, berekend op basis van OSU91A.

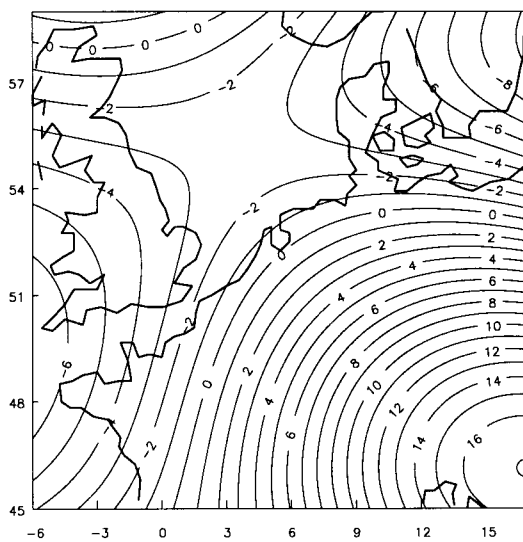
moelijk zijn om op basis van een klein gebied te kunnen onderscheiden bij welke graad het zeer gladde signaal behoort (bijvoorbeeld graad 10 of graad 20). In figuur 2.24 blijkt dat het signaal voor de graden 31-40 wel variatie vertoont binnen een 5° -gebied, zodat vanaf bijvoorbeeld $n = 40$ het binnengebied mogelijk een redelijk goede en betrouwbare waarde voor $\Delta g_n(P)$ zou kunnen geven. Met in het achterhoofd het resultaat in de figuren 2.19 en 2.20, kan worden gekozen voor een graad waarvoor de tweede nuldoorgang valt in de buurt van de binnengebiedsgrens. Dit blijkt te gelden voor $n = 46$. Dit betekent dat voor alle graden $n \geq 46$ de waarde van $\Delta g_n^{\sigma_o}(P)$ minimaal twee nuldoorgangen heeft. Voor graad $n = 90$ is bij $\psi_o = 5^\circ$ de 3e nuldoorgang al gepasseerd, en

voor $n = 180$ is al bijna de 6e nuldoorgang bereikt.

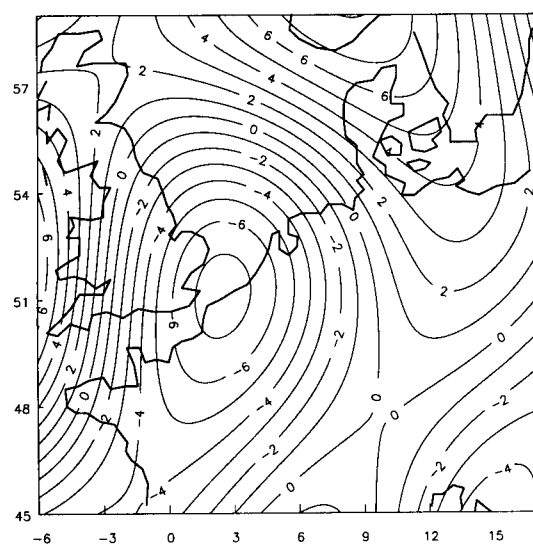
Het probleem dat we momenteel behandelen ontstaat eigenlijk doordat geen eenduidig sampling-theorema voor de bolfuncties bestaat. Hierdoor is het moeilijk vast te stellen welke frequenties/graden kunnen worden bepaald uit een 5° -binnengebied. Als we niet een directe spectrale transformatie bekijken maar uitgaan van een kleinste-kwadraten aansluitingsberekening, dan hoeft niet persé de gehele golflengte te passen in het binnengebied. Als de binnengebieddata zeer goed bekend zijn, dan kan bijvoorbeeld een



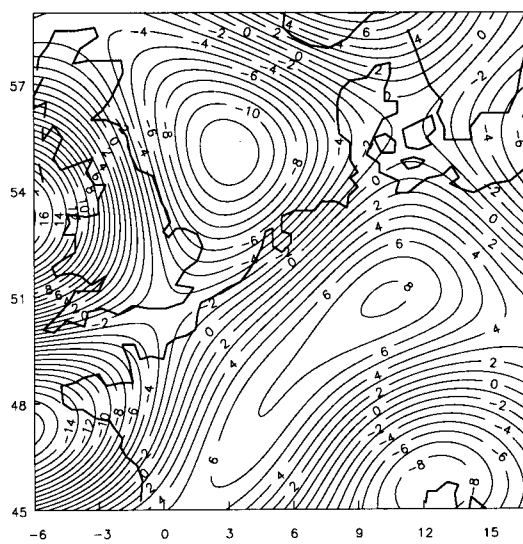
Figuur 2.21 Zwaartekrachtenanomalieën uit OSU91A, $n=2,10$. In mgal.



Figuur 2.22 Zwaartekrachtenanomalieën uit OSU91A, $n=11,20$. In mgal.



Figuur 2.23 Zwaartekrachtenanomalieën uit OSU91A, $n=21,30$. In mgal.

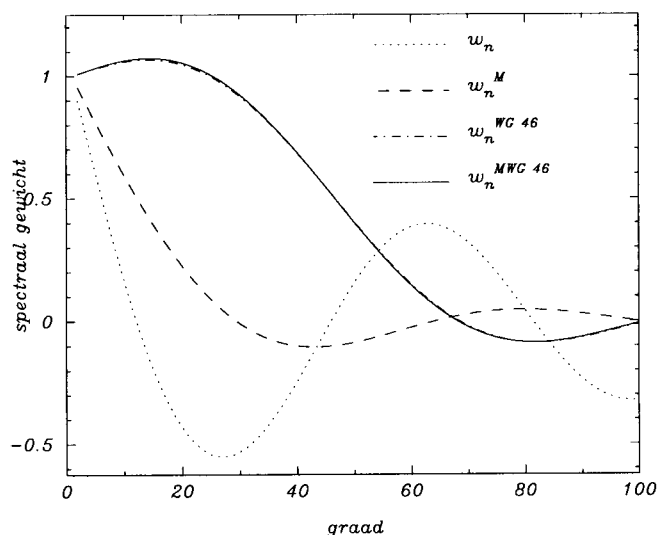


Figuur 2.24 Zwaartekrachtenanomalieën uit OSU91A, $n=31,40$. In mgal

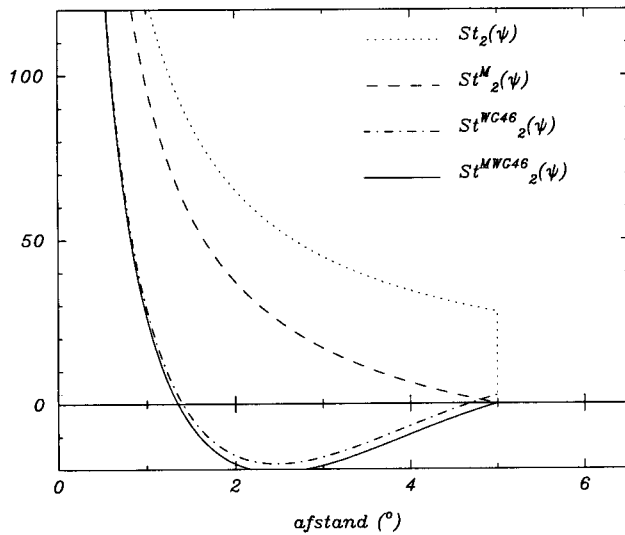
signaaldeel met golflengte 20° of 40° door een kleinste-kwadraten aansluitingsberekening worden bepaald. Dit zou betekenen dat lage graden ook al goed uit een relatief klein binnengebied kunnen worden bepaald.

We zullen ons nu richten op de keuze van een kernfunctie die de gewenste spectrale gewichtsverdeling kan realiseren. Als wordt gekozen dat we uit een binnengebied met een straal van 5° frequenties in de zwaartekracht vanaf graad $n = 47$ willen bepalen, dient een kernfunctie te worden gekozen die dit bewerkstelligt. De spectrale gewichten van de gewone combinatiemethode en de Meissl-modificatie zijn al getoond in figuur 2.16. Daaruit blijkt dat vanaf graad 6 en 12 al meer dan de helft van het gewicht aan het binnengebied wordt toegekend en dus niet voldoen aan de genoemde wens. Met de Wong&Gore- en de gecombineerde Meissl/Wong&Gore-modificaties kan beter een spectrale verdeling worden gerealiseerd, zoals al was te zien in figuur 2.17. Voor de gekozen graad $n = 47$, zijn de spectrale gewichten berekend en weergegeven in figuur 2.25, en de bijbehorende kernfuncties $St_2^*(\psi)$ in figuur 2.26. Daaruit blijkt dat inderdaad tot graad 47 meer dan 50% van de geoïdebijdrage uit de geopotentialinformatie wordt bepaald. Als we denken dat de binnengebieddata veel beter zijn dan de geopotentialmodeldata en dat lage graden inderdaad uit een klein binnengebied kunnen worden bepaald (door bijvoorbeeld kleinste-kwadraten aansluiting) dan is de Meissl-kernfunctie een goede keuze. Hierbij wordt vanaf graad 12 al meer dan de helft van het gewicht aan het binnengebied toegekend.

De relatieve geoïdehoogtefout is berekend voor de Meissl-modificatie en de gecombineerde Meissl/Wong&Gore-modificatie met $L = 46$. Ze zijn gegeven in de figuren 2.27 en 2.28. Het verschil van deze laatste met de Wong&Gore-modificatie is vrijwel nul, zoals ook kan worden gezien aan de spectrale gewichten in figuur 2.25. Dit komt doordat $St_2^{WG,L=46}(5^\circ) \approx 0$.



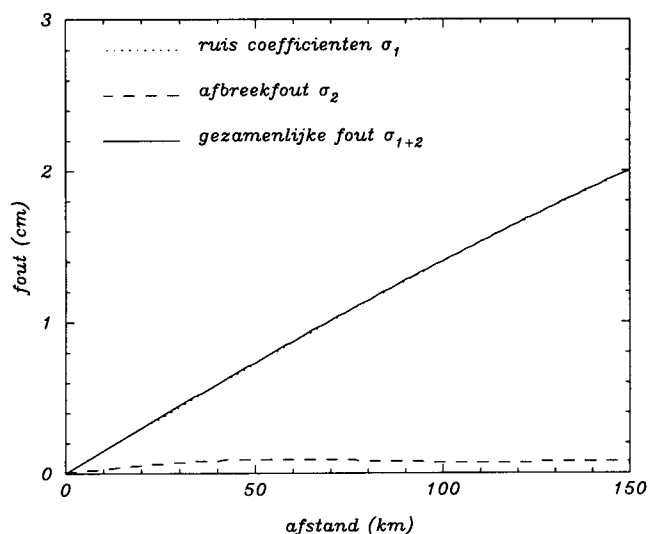
Figuur 2.25 Spectrale gewichten voor de 4 kernfuncties, met $L = 46$, $\psi_0 = 5^\circ$.



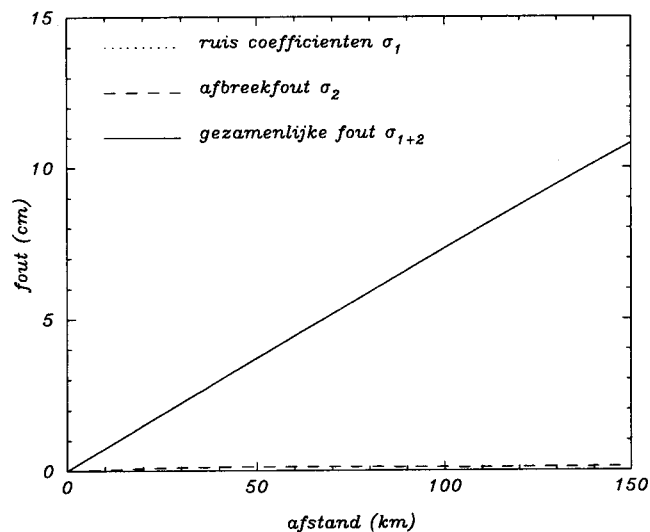
Figuur 2.26 De kernfuncties $St_2^*(\psi)$ bij de Q_n^* -coëfficiënten uit figuur 2.25.

De afbreekfout is veel kleiner geworden bij de gecombineerde Meissl/Wong&Gore kernfunctie dan bij de gewone combinatieoplossing. Verder blijkt dat de Meissl/Wong&Gore kernfunctie, met $L = 46$, nauwelijks een kleinere fout in de geoïde oplevert ten gevolge van de ruis van de geopotentialcoëfficiënten, dan de gewone combinatiemethode (figuur 2.11). Er dient echter te worden bedacht dat de binnengebiedfout hier nog bij komt. Bij de gewone combinatiemethode krijgen de binnengebieddata veel gewicht voor lage graden n , en bij de Meissl/Wong&Gore kernfuncties met $L=46$ weinig gewicht. Dus zal de fout op deze lage frequenties veel groter zijn bij de gewone combinatie dan bij de Meissl/Wong&Gore methode met $L = 46$.

We hebben nu twee kernfunctiemodificaties beschreven die beide mogelijkwijs een goede geoïde-oplossing geven. Het is echter niet goed mogelijk op basis van theoretische argumenten een keuze voor de optimale methode te maken. Dit wordt ook nog eens bemoeilijkt doordat het zeer moeilijk is iets te zeggen over de preciese kwaliteit van de binnengebieddata op grote golflengten. De Meissl- en Meissl/Wong&Gore $L = 46$ kernfuncties zijn de twee uitersten van de mogelijkheden die we hebben gekozen. De gecombineerde Meissl/Wong&Gore $L = 32$ kernfunctie ligt daar tussenin. De spectrale gewichten hiervan zijn ongeveer gelijk aan het gemiddelde van de twee gekozen uitersten. Omdat geen eenduidige keuze te maken is op dit moment, zal de definitieve keuze voor de te gebruiken methode voor de geoïde voor Nederland worden gedaan op basis van de vergelijking met externe geoïdehoogte-informatie. Dit zal worden beschreven in hoofdstuk 6. De uiteindelijke keuze valt daarbij op de gecombineerde Meissl/Wong&Gore kernfunctie met $L = 32$.



Figuur 2.27 Fout in de geoïde door de ruis van de geopotentialcoëfficiënten en de afbreekfout voor de Meissl -kernfunctiemodificatie. De foutgraadvarianties ε_n van OSU91A en de signaalgraadvarianties c_n van Tscherning en Rapp zijn gebruikt (zie figuur 2.10). De ruisfout en de totale fout vallen min of meer samen.



Figuur 2.28 Fout in de geoïde door de ruis van de geopotentialcoëfficiënten en de afbreekfout voor de Meissl/Wong&Gore -kernfunctiemodificatie met $L = 46$. De foutgraadvarianties ε_n van OSU91A en de signaalgraadvarianties c_n van Tscherning en Rapp zijn gebruikt (zie figuur 2.10). De ruisfout en de totale fout vallen min of meer samen.

Alle kernfunctiemodificaties die zijn behandeld in de laatste twee paragrafen 2.6 en 2.7, kunnen ook worden geïmplementeerd in de gemodificeerde collocatieformule (2.43) en (2.44). Dit is te zien door (2.41) aan te passen en het vervolg weer af te leiden.

2.8 Procedure voor de geoidberekening

In dit hoofdstuk over geoidberekeningsmethoden zijn verschillende aspecten van de geoidberekeningsprocedure aan de orde gekomen. Het betreft onder andere

- Grootte van het binnengebied
- De berekeningstechniek voor het binnengebied
- De combinatie van geopotentialmodel en binnengebieddata (kernfunctiemodificatie)

Voordat de Nederlandse geoid ook daadwerkelijk berekend kan worden moet gekozen worden welke methode tot de beste resultaten zal leiden. Deze keuze wordt hier kort samengevat.

Als eerste wordt de grootte van het binnengebied genoemd. Uit de figuren met de geoidfout ten gevolge van de ruis van de geopotentialcoëfficiënten en de afbreekfout blijkt dat hoe groter het binnengebied, hoe kleiner deze fout is. Daarom wordt een zo groot mogelijk binnengebied gebruikt. In de Nederlandse praktijk betekent dat een binnengebied met een straal van van 5° . De realisatie van een volledige bedekking met zwaartekrachtdata voor een groter gebied is vrijwel onmogelijk.

Als berekeningsmethode voor de binnengebied geoidbijdrage $N_2(P)$, wordt gebruik gemaakt van numerieke integratie over gemiddelde blokwaarden. Zoals in hoofdstuk 3 wordt getoond, zijn er meer dan 95000 zwaartekrachtwaarden beschikbaar in het binnengebied. Als hieruit gemiddelde blokwaarden worden bepaald met blokgrootte $3' \times 5'$, zijn dat er ongeveer 65000. Een berekening met collocatie is rekentechnisch onmogelijk zonder een groot deel van deze informatie niet te gebruiken. Een combinatieoplossing van numerieke integratie en collocatie zou mogelijk zijn volgens (2.45). Maar ook daarvoor wordt niet gekozen omdat er dan problemen ontstaan bij de overgang van het extra binnengebied en de rest van het binnengebied. Deze combinatie is ook niet nodig omdat de datadichtheid in Nederland zo hoog is dat voldoende kleine blokgebieden kunnen worden gekozen. De numerieke integratie vindt dus plaats over gemiddelde blokwaarden van $3' \times 5'$ ($(5.6 \text{ km})^2$).

Het geëxtrapoleerde zwaartekrachtssignaal in het buitengebied, zoals dat bij de gewone collocatiemethode automatisch wordt berekend en meegenomen in de geoidbijdrage, zal niet worden gebruikt. In hoofdstuk 6 wordt getoond dat geëxtrapoleerde zwaartekrachtwaarden kunnen worden berekend die niet realistisch zijn. Bovendien kan de formele foutberekening van de ruis van de geopotentialcoëfficiënten en de afbreekfout niet meer worden uitgevoerd als het binnengebied niet meer cirkelvormig is met bekende straal ψ_0 .

Het gecombineerde gebruik van de geopotentialcoëfficiënteninformatie en de binnengebied zwaartekrachtinformatie, zal plaats vinden met de gecombineerde Meissl/Wong&-Gore kernfunctiemodificatie met $L = 32$. Dat betekent dus dat vanaf graad 33 de Legendre polynomen voor Stokes functie worden gesommeerd. De waarde van deze

kernfunctie voor $\psi = 5^\circ$ wordt vervolgens nog van de kernfunctiewaarden afgetrokken. Daarbij wordt het geopotentialmodel gebruikt tot en met de maximale graad 360. Met deze keuze wordt verwacht dat de meest realistisch modellering voor het gebruik van de twee beschikbare datasets is gedaan. Dit volgt uit een vergelijking met onafhankelijke geoïde-informatie, omdat op basis van theoretische argumenten geen eenduidige keuze valt te maken. De gekozen oplossing ligt in het midden van de mogelijke oplossingen. De geoïdebijdrage voor hogere graden, die wel goed uit het binnengebied kunnen worden bepaald, moeten zoveel mogelijk uit de binnengebieddata worden berekend. Verder is het van belang dat de spectrale gewichten voor het geopotentialmodel en de nuldata voor de hoge graden zo klein mogelijk zijn, zodat de afbreekfout zo klein mogelijk is. Bij de gekozen kernfunctiemodificatie wordt aan deze voorwaarden het beste voldaan.

3 Zwaartekrachtdata in en om Nederland

In Nederland is een zwaartekrachtproject uitgevoerd, dat misschien wel uniek in de wereld is. Omdat er in Nederland geen zwaartekrachtdataset beschikbaar was om een zeer preciese geoïde te berekenen, is in 1989 besloten om voor dit doel binnen enkele jaren een nieuw zwaartekrachtnetwerk op te zetten.

In veel landen zijn vrij preciese zwaartekrachtnetwerken van goede dichtheid gemeten, omdat deze nodig zijn voor het aanbrengen van orthometrische correcties aan waterpasmetingen. Er zijn ook altijd al zwaartekrachtmetingen uitgevoerd om de geoïde te bepalen of voor geofysische doeleinden. Ook in Nederland zijn dergelijke metingen uitgevoerd, de resultaten daarvan zijn opgenomen in een Bougueranomaliëenkaart in de Atlas van Nederland (o.a. in de versie van 1970). Het isolijneninterval van deze kaart is 2 mgal. Uit deze kaart zijn door Bakker (1963) gemiddelde waarden bepaald voor blokgebiedjes van 3'x5' ($\approx 5.6 \times 5.6 \text{ km}^2$). De metingen die ten grondslag liggen aan de kaart zijn gedaan door de BPM (het huidige Shell) in de jaren '40 en '50. Navraag bij Shell en haar archief heeft de oorspronkelijke metingen niet boven tafel weten te brengen, zodat niet te achterhalen is hoe goed de metingen zijn gedaan, hoe de aansluiting aan absolute waarden heeft plaats gevonden, et cetera. Omdat de kwaliteit van de destijds gebruikte instrumenten niet bijzonder goed was, kan worden verwacht dat er zowel hoogfrequente als laagfrequente (systematische) fouten voorkomen. Om die reden is in 1989 besloten om een nieuw zwaartekrachtnetwerk in Nederland op te zetten. Dit project is uitgevoerd door de Meetkundige Dienst van de Rijkswaterstaat (MD) en de Faculteit der Geodesie van de Technische Universiteit Delft (FGE). In het project heeft de FGE de opzet en start van het project en algemene begeleiding voor haar rekening genomen, terwijl vrijwel alle metingen en de coordinatie daarvan zijn uitgevoerd door de MD. De verwerking van de data heeft plaatsgevonden bij de MD, onder begeleiding van de FGE.

In het eerste deel van dit hoofdstuk (paragraaf 3.1) zal worden ingegaan op de opzet van het netwerk en de resultaten van de vereffening en zal een beschrijving worden gegeven van het uiteindelijke resultaat. De dataset krijgt veel aandacht, omdat voor de geoïde de zwaartekrachtdata vlakbij de geoïdeberekeningspunten het belangrijkste zijn. De fout in deze data is dus belangrijk voor de fout in de geoïde. Na de beschrijving van deze Nederlandse dataset, zal een beschrijving van de overige beschikbare datasets worden gegeven, welke samen met de nieuwe Nederlandse dataset zullen worden gebruikt om een binnengebied van 5° te verkrijgen voor alle geoïdeberekeningspunten in Nederland. Vervolgens worden de datasets verder geanalyseerd en onderling vergeleken in paragraaf 3.3.

3.1 Het nieuwe Nederlandse zwaartekrachtmetingennet

Absolute zwaartekrachtmetingen zijn lastig uit te voeren en tijdrovend. Bovendien is een absolute gravimeter erg duur. Met relatieve gravimeters kan veel sneller en goedkoper worden gemeten. Deze kunnen echter alleen zwaartekrachtverschillen meten, en geen absolute waarden. Er zijn dus één of meerdere punten nodig waarvan de absolute zwaartekrachtwaarde wel bekend is, om voor alle overige meetpunten ook de absolute waarden te kunnen berekenen. De opzet van het nieuwe zwaartekrachtmetingennet in Nederland bestaat daarom uit drie niveau's.

- Er zijn op 3 punten absolute zwaartekrachtmetingen beschikbaar, die voor alle zwaartekrachtmetingpunten een absolute waarde moeten opleveren.
- Daarnaast is een eerste-orde net gemeten en berekend met 55 punten in heel Nederland.
- Deze eerste-orde punten zijn vervolgens gebruikt om de tweede-orde punten op aan te sluiten.

De absolute metingen in Nederland, de eerste in Nederland ooit op het precisieniveau beter dan 1 mgal, zijn gedaan met de absolute gravimeter van het Institut für Erdmessung, van de Universität Hannover in Duitsland. Dit instrument is de JILA-G3, die de absolute zwaartekrachtwaarde met een precisie van ongeveer $10 \mu\text{gal}$ ($= 1 \cdot 10^{-8}g$) oplevert.

In 1991 zijn metingen gedaan op punten in het satellietobservatorium van FGE in Kootwijk, de radiosterrenwacht in Westerbork, en het gebouw van FGE in Delft. Laatstgenoemd punt bleek niet geschikt te zijn voor deze absolute gravimeter, doordat horizontale trillingen (waarschijnlijk door golfslag aan de kust), de referentieveer in de gravimeter zodanig verstoorden dat grote meetruis het gevolg was. De metingen in Kootwijk en Westerbork waren succesvol (Van Ree, 1991). In 1993 zijn opnieuw metingen gedaan met de JILA-G3, ditmaal in Epen (Zuid-Limburg) en nogmaals in Kootwijk. Het punt in Epen is gelegen in een nieuw seismisch station van het KNMI, dat speciaal ondergronds is gebouwd zodat het gelegen is op het Carboon. Door deze ligging wordt een zeer stabiele meet situatie verkregen, en is er weinig last van omgevingsruis. De metingen in Epen en Kootwijk waren succesvol. Het punt in Epen blijkt inderdaad zeer stabiel gelegen, de meetruis is daar ongeveer een factor drie kleiner dan op andere geschikte plaatsen in Europa. Het verschil van de twee metingen in Kootwijk, in 1991 en 1993, is $17 \mu\text{gal}$. Dit verschil past weliswaar bij de formele standaardafwijking, maar is wel groter dan men zou hopen. Uit een uitgebreide analyse blijkt dat dit verschil niet toe te schrijven is aan een verandering van zwaartekracht, maar dat het hier meetruis betreft (De Min, 1995a). Een verslag van de absolute metingen en de resultaten wordt gedaan door Strang van Hees e.a. (1996).

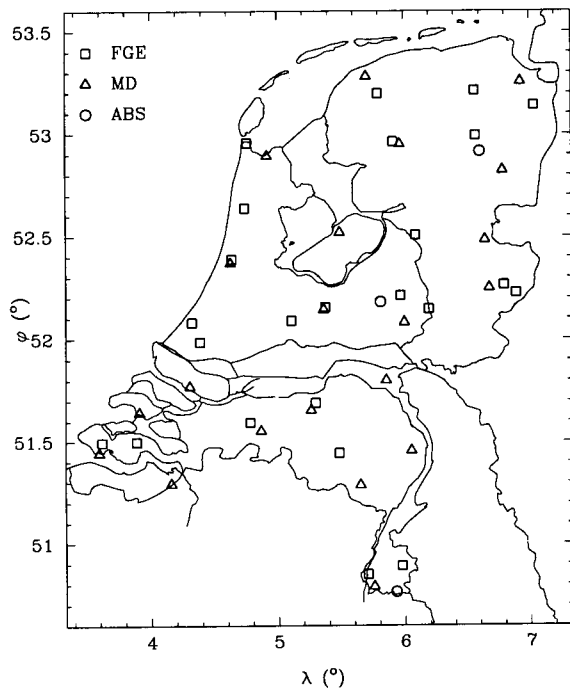
Het eerste-orde net bestond oorspronkelijk uit twee delen. Een deel bevat de punten die zijn gepositioneerd in stationshallen van de Nederlandse Spoorwegen (NS), het andere deel de punten op Ondergrondse Merken (OM) van de Rijkswaterstaat. De

FGE heeft vanaf 1986 vrijwel ieder jaar gemeten op de NS-stations. In totaal zijn ongeveer 770 metingen gedaan op 25 stations. De MD heeft in 1987 en 1990 metingen gedaan op de OM. Beide keren zijn er ongeveer 480 metingen gedaan op 30 punten. Alle metingen zijn gedaan met relatieve gravimeters. Het punt in het gebouw van FGE is onderdeel van beide delen, en er zijn 6 NS-stationspunten die worden gebruikt als excentrisch punt bij de OM. De twee delen van het eerste-orde net zijn op deze wijze verbonden. Tijdens de absolute zwaartekrachtprojecten in 1991 en 1993, zijn ook relatieve zwaartekrachtmetingen gedaan, zowel tussen de absolute stations, als met enkele punten op NS-stations en OM. Hiermee is een stevige verbinding ontstaan tussen het NS-deel en het OM-deel. Naast de verbinding aan de drie punten in Nederland waar absolute zwaartekrachtmetingen zijn verricht, zijn ook aansluitingen gemeten met drie punten in Duitsland (Aurich, Bentheim en Aken), en met drie punten in België (Blankenberge, Oud-Turnhout en Eben-Emaël), waarvoor ook absolute waarden bekend zijn.

Op basis van de beschikbare relatieve zwaartekrachtmetingen en de absolute zwaartekrachtwaarden in Nederland, Duitsland en België, is een totale vereffening uitgevoerd, om zodoende voor alle 55 eerste-orde punten in Nederland een absolute zwaartekrachtwaarde te bepalen. De metingen van de MD van 1990 zijn niet gebruikt, doordat door allerlei omstandigheden de kwaliteit veel minder was dan van de overige metingen. In totaal zijn voor de vereffening bijna 1950 relatieve zwaartekrachtmetingen gebruikt. Het resultaat is voor alle eerste-orde punten een absolute zwaartekrachtwaarde, met een precisie van 5 μ gal. Het resultaat van deze gezamenlijke vereffening wordt het Nederlands zwaartekracht datum 1993 (NEDZWA93) genoemd. Voor een uitgebreide analyse van alle eerste-orde metingen en de NEDZWA93-berekening en resultaten wordt verwezen naar (De Min, 1995a). Figuur 3.1 laat zien waar de NEDZWA93-punten liggen. De NEDZWA93-waarden worden gebruikt om het tweede-orde zwaartekrachtnet te koppelen, en zo van een absolute waarde te voorzien.

Het International Gravity Standardization Network 1971 (IGSN71) is het referentiedatum van (absolute) zwaartekrachtwaarden dat momenteel in gebruik is. Dit wereldwijde datum bestaat uit ongeveer 500 hoofdpunten met een gemiddelde precisie van 0.1 mgal. Het IGSN71 is nog steeds het internationaal geaccepteerde zwaartekracht referentiesysteem. Omdat de kwaliteit van de moderne absolute gravimeters op het niveau van 0.01-0.02 mgal is, worden ook alle absolute punten waar de laatste jaren is gemeten beschouwd als IGSN71-punten. Door de goede kwaliteit van de gebruikte metingen voor NEDZWA93 en de aansluiting aan enkele recent gemeten absolute zwaartekrachtwaarden van hoge precisie zijn alle NEDZWA93-resultaten tegelijk ook geldige IGSN71-waarden. Tot aan de totstandkoming van IGSN71 werd het Potsdam-30 systeem gebruikt, dat een verschil van ongeveer 14 mgal met het IGSN71 referentiesysteem heeft (Torge, 1989).

Het nieuwe tweede-orde net van Nederland bestaat uit bijna 8000 punten, waarop in de periode 1990-1994 ongeveer 13000 relatieve zwaartekrachtmetingen zijn gedaan. Alle metingen zijn gedaan bij peilmerken van het NAP (Normaal Amsterdams Peil, het hoogtesysteem van Nederland), zodat een preciese hoogte van het instrument kon



Figuur 3.1 Alle NEDZWA93-punten met aanduiding van soort.

worden bepaald. De precisie van de hoogte is ongeveer 1-2 cm. Deze preciese hoogte is nodig om zwaartekrachtanomalieën te kunnen berekenen. Het gehele tweede-orde project is opgedeeld in deelprojecten voor gebieden van ongeveer 8 topografische kaartbladen, dus ongeveer $25 \times 40 \text{ km}^2$. De gemiddelde afstand tussen twee meetpunten is 2 km. Per deelproject zijn er ongeveer 200 punten waarvoor ruim 300 relatieve metingen zijn verricht. De deelprojecten zijn opgebouwd uit kringen van ongeveer 5-6 punten, waarbij 1 of 2 keer wordt teruggekomen op het punt waarop begonnen is. Door deze procedure kunnen de drift van het instrument en eventuele grote fouten (sprongen) in de waarnemingsreeks worden gecontroleerd. Kringen die na elkaar op een dag, of op verschillende dagen zijn gemeten, worden verbonden door nogmaals te meten op al eerder bezochte punten. Ook de verschillende deelprojecten hebben overlappende punten, zodat alle metingen aan elkaar verbonden zijn. Omdat één enkele grote vereffening met alle 8000 punten niet erg praktisch en ook niet nodig is, is Nederland ingedeeld in 10 provincieprojecten, elk ter grootte van een gebied dat grofweg samen valt met een provincie. De verwerkingsprocedure is opgedeeld in verschillende fasen, waarbij eerst per deelproject (200 punten) een controle van de metingen en een eerste-fase vereffening zijn uitgevoerd. Als deze succesvol was afgerond, werden per provincieproject (gemiddeld ongeveer 800 punten) de metingen samengevoegd. Er werd per provincieproject een eerste-fase vereffening gedaan.

In 1993 en 1994 zijn tijdens de metingen ook verbindingen gemeten met eerste-orde punten. Voor deelprojecten die voor 1993 zijn gemeten is dat niet gedaan, zodat daarvoor aparte aansluitmetingen zijn verricht in 1993. Elk provincieproject is aangesloten op minimaal 3 eerste-orde zwaartekrachtpunten. Een tweede-fase vereffening is uitgevoerd,

waarbij een kleinste-kwadraten aansluiting is uitgevoerd aan de NEDZWA93-waarden, welke in de aansluitingsvereffening zijn gebruikt met de bijbehorende standaardafwijking. Op één eerste-orde punt is een probleem ontstaan, doordat een verkeerde hoogtemaat is gemeten, hetgeen is gecorrigeerd. De aansluiting is verder vlekkeloos verlopen. Bij deze aansluiting wordt ook een controle uitgevoerd op de schaalfactoren van de gebruikte instrumenten. Op de uit ijking bepaalde schaalfactoren zijn geen significante correcties aangebracht.

Ook tussen de 10 provincieprojecten bestond overlap. In totaal zijn er 184 punten waarvoor twee absolute waarden zijn bepaald. De verschillen tussen deze waarden geven een aanduiding van de bereikte precisie van de tweede-orde waarden. Van de 184 punten hebben er drie een verschil groter dan 0.5 mgal. De gemiddelde waarde en de rms-waarde (root-mean-square-waarde, de standaardafwijking) van de overige verschillen zijn respectievelijk -0.024 mgal en 0.087 mgal. Deze rms-waarde komt redelijk overeen met de formele precisie van de tweede-orde metingen. Voor sommige gebieden is deze 0.020-0.040 mgal, voor andere gebieden 0.060-0.100 mgal. Deze variatie wordt veroorzaakt door metingen met verschillende instrumenten, (in)stabiliteit van de ondergrond, weersomstandigheden, inzet van verschillende meetploegen, et cetera.

Niet alle punten zijn meer dan één keer bezocht, zodat een extra methode voor blunderdetectie moet worden uitgevoerd. Doordat het zwaartekrachtssignaal aan fysische begrenzings onderhevig is kan een controle van de gemeten zwaartekrachtwaarden worden uitgevoerd. De zwaartekrachtwaarde kan over een afstand van bijvoorbeeld 2 km maar in een bepaalde mate variëren. De covariantiefunctie, zie paragrafen 2.3 en 2.4, geeft aan wat de gemiddelde correlatie over een bepaalde afstand is. Met kleinste-kwadraten predictie is een interpolatie uitgevoerd op de positie van elk van de tweede-orde punten, waarbij alleen de punten in de buurt zijn gebruikt en niet (de waarde van) het punt zelf. Daarbij is de predictiefout bepaald volgens (2.29). De gebruikte covariantiefunctie is een aangepaste analytische functie bij de empirische covariantiefunctiewaarden bepaald volgens (2.52). Uit de totale tweede-orde dataset zijn eerst de eerste-orde punten verwijderd. De hoogten van de punten op NS-stations zijn namelijk niet goed bekend, en de OM-punten liggen in putten onder het maaiveld waardoor de zwaartekrachtgradient sterk afwijkt van de vrijelucht gradient. Hierdoor kunnen de zwaartekrancht-anomalieën niet juist berekend worden. De verschillen die optreden tussen de gemeten waarden en de geïnterpoleerde waarden zijn ook een maat voor de precisie van de metingen (Molodenskii e.a., 1962, p.171). Voor deze controleberekening zijn Bouguer-anomalieën (Heiskanen&Moritz, 1967) gebruikt, omdat deze zoveel mogelijk ongecorrleerd zijn met topografievariaties.

In totaal zijn 7805 zwaartekrachtwaarden voorspeld. Voor 2% van deze punten is het verschil tussen de gemeten en de geschatte waarde groter dan 2 keer de berekende standaardafwijking van de geschatte waarde. Voor 97% van de punten ligt het verschil binnen ± 1 mgal, voor 99% binnen ± 2 mgal. Er zijn ongeveer 80 punten waarvoor het verschil groter is dan 2 mgal. Deze punten liggen vaak met drie of vier punten bij elkaar, waarbij het in het midden gelegen punt het grootste absolute verschil heeft en de omliggende punten een kleiner verschil met een tegengesteld teken. Dit wordt

veroorzaakt doordat een fout in het middelste punt een fout in de geschatte waarde van de omliggende punten veroorzaakt, terwijl die eigenlijk goed zijn. Er blijven dan ongeveer 25 van zulke punten over, en nog enkele geïsoleerd liggende punten. De 25 punten zijn gecontroleerd op schrijffouten, afleesfouten, typefouten en andere fouten. Bij de meeste ervan is gebleken dat de verkeerde coördinaten aan het punt waren toegekend. De gemeten waarde is wel juist, maar ligt niet op de goede plaats, en past dus niet bij zijn buurpunten. Nadat deze fouten zijn gecorrigeerd, is opnieuw de datacontroleberekening uitgevoerd. Als namelijk één van de omliggende punten uit een genoemd clustertje ook fout is, dan moet dat via een iteratief proces worden gedetecteerd. Er bleven enkele punten over waarvoor het verschil groter is dan 2 mgal en de standaardafwijking van de geschatte waarde kleiner dan 1 mgal. Deze zijn verwijderd uit de dataset. Uiteindelijk is dus bij ongeveer 0.4% van de punten een fout gemaakt bij de meting of de verwerking. De ruim 7800 tweede-orde zwaartekrachtpunten zijn weergegeven in figuur 3.2. Voor elk van deze punten zijn de zwaartekracht en de zwaartekrachtanomalieën bepaald ten opzichte van GRS80 (Moritz, 1980b) en IGSN71 (via NEDZWA93).

De precisiebeschrijving van de waarden kent verschillende aspecten. Aan de ene kant volgt de formele standaardafwijking uit de vereffening, en een precisiemaat uit de verschillen met de controleberekeningen ($\sigma = 0.2 - 0.5$ mgal). Deze geven beide een maat voor hoogfrequente ruis. Aan de andere kant is er ook een correlatie in de fout van de verschillende punten. Deze correlatie ontstaat door de opzet van het zwaartekrachtnet. Zo kan worden verwacht dat punten die samen in één kring zijn gemeten allemaal een vergelijkbare fout hebben door bijvoorbeeld een sprong in de instrumentdrift. Zo'n sprong veroorzaakt echter geen correlatie tussen punten die op verschillende dagen zijn gemeten. Verder zal een fout in een eerste-orde punt voor alle punten in zijn omgeving een zelfde fout geven. Dit is dus een langgolvige fout. In het algemeen hangen deze fouten af van de afstand tussen twee punten. Fouten ten gevolge van (sprongen in) de instrumentdrift hebben gevolgen voor punten die op een dag zijn gemeten en daarom meestal dicht bij elkaar liggen (ongeveer 10 km). De amplitudes die kunnen worden verwacht zijn 0.04-0.08 mgal (ervaringsgetal). De amplitude van een fout in een eerste-orde punt zal hooguit 0.01-0.02 mgal zijn, met een effect tot afstanden van 20-35 km. Deze meetruis (correleerde meetfout) kan worden beschreven met een eenvoudige Gaussische functie

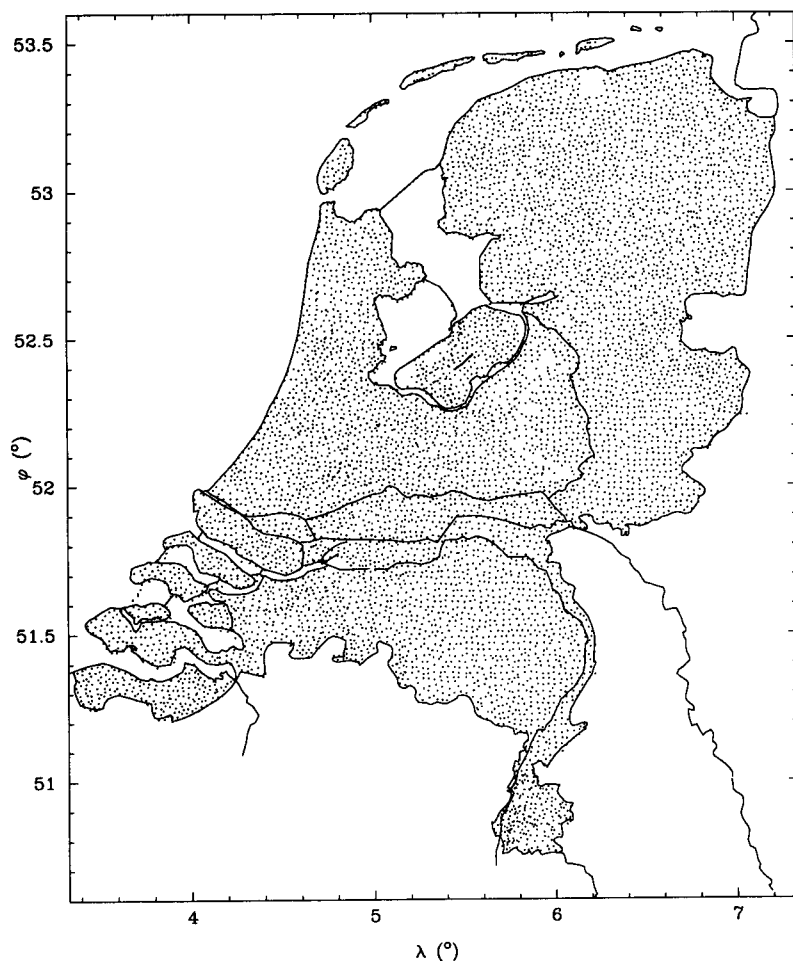
$$D(\psi) = a \exp\left(-\frac{\psi^2}{b^2}\right). \quad (3.1)$$

Hierin geeft a de amplitude aan en b de afstand waarover 37% foutcorrelatie bestaat. De totale meetfoutvariantie in de tweede-orde zwaartekrachtwaarden kan dan worden beschreven door

$$D(\psi) = 0.3^2 \delta(\psi) + 0.06^2 \exp\left(-\frac{\psi^2}{0.06^2}\right) + 0.02^2 \exp\left(-\frac{\psi^2}{0.20^2}\right) \text{ mgal}^2, \quad (3.2)$$

met ψ in $^\circ$, en $\delta(\psi) = 0$ als $\psi \neq 0$ en $\delta(0) = 1$. De standaardafwijking van een enkel zwaartekrachtpunt wordt berekend als

$$\sigma^2 = D(0), \quad (3.3)$$



Figuur 3.2 Alle nieuwe tweede-orde zwaartekrachtpunten.

terwijl de standaardafwijking van een zwaartekrachtverschil wordt berekend met

$$\sigma_{\psi}^2 = 2D(0) - 2D(\psi) . \quad (3.4)$$

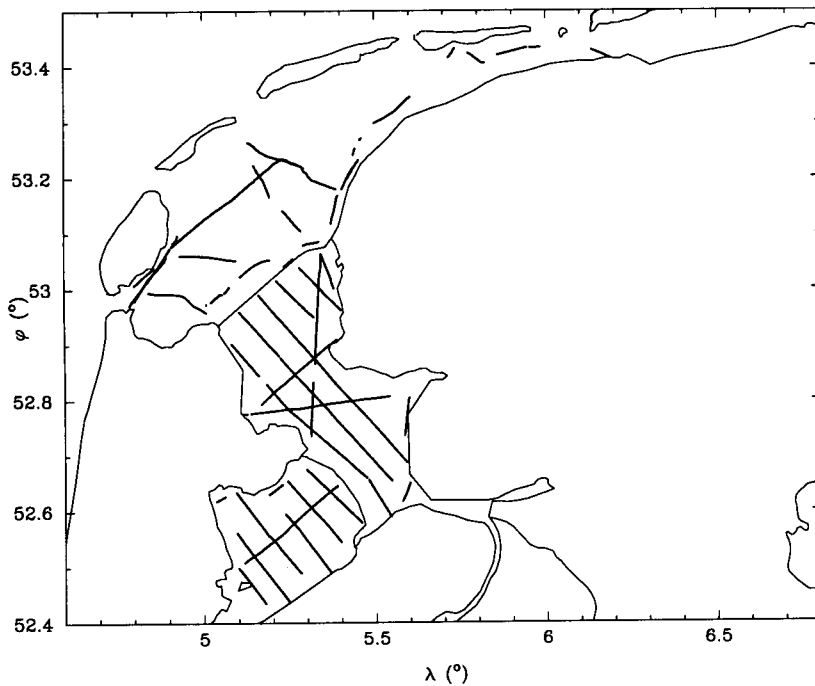
Niet het hele net zoals afgebeeld in figuur 3.2 is gemeten binnen het zwaartekrachtproject. In Zuid-Limburg waren zwaartekrachtmetingen beschikbaar uit een project van de Rijksgeologische Dienst (RGD) (zie Bless e.a., 1980). Aangezien de dichtheid nog iets hoger is dan van het nieuwe netwerk zou dit RGD-net kunnen worden gebruikt. In 1989 is door Nohlmans (1990) op 22 van de 200 punten opnieuw gemeten, voor zover de punten konden worden terug gevonden. De overeenkomst van de gegeven en de nieuwe zwaartekrachtwaarden bleek zeer goed te zijn, zodat in dit deel van Nederland geen nieuwe zwaartekrachtmetingen nodig waren. Het nieuwe net is daarom gemeten tot ongeveer ter hoogte van Sittard. In het overgangsgebied van de nieuwe dataset en de RGD-dataset is op basis van beide datasets de zwaartekrachtanomalie berekend op 11 punten met kleinste-kwadraten predictie. Het gemiddelde verschil van de 11 predictiepunten is -0.113 mgal, met een rms-waarde van 0.179 mgal. De minimale en maximale

waarden zijn -0.332 en 0.209 mgal, terwijl de voorspelde zwaartekrachtanomaliewaarden variëren tussen -26 en -5 mgal. Er zijn dus geen significante verschillen tussen de nieuwe Nederlandse dataset en de oude RGD-dataset in Limburg.

De beschrijving van de nieuwe zwaartekrachtdataset op land is nu klaar. Deze dataset zal verder worden aangeduid als nieuw Nederlands net. Om een volledige bedekking te krijgen met zwaartekrachtinformatie binnen Nederland was het ook nodig om zwaartekrachtmetingen te doen op het **IJsselmeer en de Waddenzee**. In 1992 zijn daarom met de zeegravimeter van FGE op een boot van de Rijkswaterstaat, gedurende drie weken metingen verricht op de genoemde wateren, onder de naam WADGRAV. In totaal heeft men ongeveer 700 km meetprofiel gevaren. Doordat de veer in het instrument na een koerswijziging ongeveer 15 minuten nodig heeft om weer in een stabiele situatie terug te komen, moeten de gekozen vaarlijnen zo recht mogelijk zijn. Op het IJsselmeer en de Markerwaard was dat goed mogelijk, maar op de Waddenzee niet. Het resultaat is dat er op de Waddenzee slechts enkele korte stukken meetprofiel kunnen worden gebruikt. Een ander probleem bij dit project was dat de gyroscoop van de zeegravimeter na enkele dagen defect raakte, en dat de verwisselde gyroscoop geen informatie kon geven over het cross-coupling effect (Torge, 1989, p.270). Bij rustig weer is dit effect vrij klein, maar bij onrustig weer en grote zeegang kan de cross-coupling oplopen van enkele tot 10 mgal. Dit is ook duidelijk te zien in de resultaten van het project (Weesie, 1993). Eén vaarlijn op het IJsselmeer is gevaren tijdens ruwe weersomstandigheden, met de wind schuin op kop, en deze lijn sluit ook niet goed aan op de kruispunten met andere lijnen. Uiteindelijk zijn 3400 zwaartekrachtwaarden bepaald op de vaarlijnen met een tijdsinterval van 2 minuten tussen de punten. Dat betekent een gemiddelde afstand van 200 m. Figuur 3.3 laat de vaarlijnen met bruikbare metingen zien. Omdat ook een zeegravimeter alleen zwaartekrachtverschillen kan meten, zijn aansluitingen verricht met punten in havens. Direct na het WADGRAV-meetproject zijn de waarden van deze havenpunten bepaald door aansluiting aan NEDZWA93-punten.

De standaardafwijking van de zeegravimeter is 1 mgal, waarbij een correlatie over een kort tijdsinterval bestaat. Doordat de cross-coupling correctie niet is gemeten voor het grootste deel van het project, zal de fout groter zijn. Voor de meeste vaarlijnen zal sprake zijn van een systematisch effect. Op basis van de landzwaartekrachtwaarden op de Afsluitdijk en in de Flevopolder, kunnen nog correcties worden bepaald voor vaarlijnen. Een schatting van de behaalde precisie wordt ook verkregen door te kijken naar de verschillende waarden op kruispunten van vaarlijnen. In (Weesie, 1993) ziet men dat dit een rms-waarde van 1.9 mgal geeft. Dit is een realistischer waarde dan de formele instrumentprecisie.

Omdat voor de geoïdebijdrage $N_2(P)$ een gebied van 5° (≈ 556 km) wordt gebruikt, zijn de hierboven beschreven data in Nederland en IJsselmeer en Waddenzee niet voldoende, maar is ook zwaartekrachtinformatie voor de landen en zee rondom Nederland nodig.



Figuur 3.3 Meetpunten op de vaarlijnen van het WADGRAV-project.

3.2 Beschrijving van de overige databestanden

In deze paragraaf zullen de andere bestanden met zwaartekrachtinformatie die beschikbaar zijn voor gebieden in en om Nederland, worden besproken.

Atlas van Nederland, 3'x5'

Op basis van de kaart met Bougueranomaliën uit de Atlas van Nederland, zoals ook weergegeven in uitgave 1970, blad II-7, zijn door Bakker (1963) gemiddelde waarden bepaald voor gebieden van 3' in breedterichting en 5' in lengterichting. Dat zijn blokgebieden van ongeveer $(5600 \text{ m})^2$. Voor dezelfde blokken is ook een schatting van de gemiddelde hoogte gedaan, waarna gemiddelde blokwaarden van de vrijelucht anomalieën zijn berekend. In totaal zijn 1267 waarden gegeven. De standaardafwijking van de gemiddelde blokwaarden is geschat op 1.5 mgal, waarin de meetfout en de digitalisatiefout zijn gecombineerd. De kaart is gemaakt op basis van een toen bekende absolute zwaartekrachtwaarde in De Bilt (Van Weelden, 1957). Onduidelijk is welk punt precies is gebruikt, zodat een controle niet meer mogelijk is. Volgens Van Weelden zijn er ongeveer 26000 meetwaarden gebruikt bij het maken van de kaart. De anomalieën in het gedigitaliseerde bestand van FGE zijn gegeven ten opzichte van het geodetisch referentie systeem GRS67 (IAG, 1970; Moritz, 1971). Het zwaartekracht referentiesysteem waarin de waarde voor het punt in De Bilt is gegeven is het Potsdamsysteem. Deze waarden uit de Atlas-kaart zijn gebruikt in de vorige geoïdeberekening voor Nederland (Van Willigen, 1985).

BPM-kaarten, puntwaarden Bougueranomalieën

In 1991 zijn in het archief van Shell BPM-kaarten gevonden waarop voor aangegeven punten Bougueranomalieën zijn gegeven. Binnen het project WEEGP van GETECH/Leeds University zijn door Fairhead (1994) deze kaarten gedigitaliseerd. De resultaten zijn zoveel mogelijk gecontroleerd en uiteindelijk zijn waarden berekend ten opzichte van GRS80. In het resulterende bestand komen 14144 puntwaarden voor, welke heel Nederland, behalve het zuidelijke deel van Limburg, bedekken. Ook de natte delen (IJsselmeer en Waddenzee) bevatten puntwaarden. De metingen die de basis vormen van de kaarten zijn gedaan door BPM-medewerkers, ongeveer in de periode 1940-1955. De voornaamste doelen waren geologische en geofysische toepassingen. De kwaliteit van de metingen wordt geschat op 2 mgal (Van Weelden, 1957). Er is altijd gedacht dat ook de kaart in de Atlas van Nederland op basis van deze metingen is gemaakt, maar het aantal metingen dat Van Weelden (1957) noemt komt niet overeen met het aantal punten op de eigen BPM-kaarten. De resultaten van de digitalisatie in Leeds zijn door Shell Nederland beschikbaar gesteld aan FGE voor vergelijkingsdoeleinden. De resultaten zijn door GETECH omgerekend naar GRS80 en IGSN71, in de veronderstelling dat de oorspronkelijke waarden zijn gegeven ten opzichte van Potsdam-30. Op basis van een latere vergelijking (zie paragraaf 3.3) krijgen deze data door ons nog een correctie van ongeveer 28 mgal (twee keer 14 mgal verschil tussen Potsdam-30 en IGSN71). Omdat van deze punten geen hoogten zijn gegeven, kunnen ze niet direct worden omgerekend naar vrijelucht anomalieën.

BGI landdata België, Frankrijk, Duitsland, Denemarken, puntwaarden

Bureau Gravimétrique International (BGI) is het uitvoerend bureau van het IAG (International Association of Geodesy). Eén van de belangrijkste taken van BGI is het verzamelen, controleren en bewerken van zwaartekrachtinformatie op aarde. Er worden kaarten gemaakt, en de data is beschikbaar voor wetenschappelijke doeleinden. Voor sommige doeleinden mogen, van de eigenaren van de data, puntwaarden beschikbaar worden gesteld, voor andere doeleinden alleen berekende gemiddelde waarden. Voor het landgebied rondom Nederland zijn puntdata beschikbaar gesteld in België, Luxemburg, Frankrijk, Duitsland en Denemarken. Figuur 3.4 geeft aan waar deze meetpunten zich bevinden. Daaruit blijkt dat voor delen van Duitsland en Denemarken de dichtheid vergelijkbaar is met Nederland (figuur 3.2), en dat voor andere delen van Duitsland de dichtheid iets minder is. In België is de dichtheid slecht, ongeveer 15 km tussen de punten. De Belgische data komen uit een bestand uit 1948. De data in Luxemburg en Frankrijk zijn redelijk dicht. In totaal zijn 21199 puntwaarden beschikbaar gesteld door BGI. De standaardafwijking die wordt meegegeven varieert van 0.1 mgal tot 5 mgal. De zwaartekrachtanomalieën zijn gegeven ten opzichte van GRS67 en in het IGSN71 zwaartekrachtreferentiesysteem.

NAVGRAV, BGS-Noordzee-bestand, 4x4 km²

In 1981 en 1985 zijn door de FGE zwaartekrachtmetingen gedaan op de Noordzee. Dit project heet NAVGRAV. In beide campagnes is het instrument van de FGE gebruikt; in 1985 is tevens met een zeegravimeter van de Technische Universiteit Hamburg uit

Duitsland gemeten. Het project in 1985 diende tegelijkertijd voor een analyse van positie- en snelheidsbepalingssystemen, zowel voor navigatiedoeleinden (vandaar NAV) als voor correctieberekeningen voor de zwaartekrachtmetingen (Eötvöscorrectie). Uitgebreide rapportages over beide projecten zijn (Strang van Hees, 1983) en (Haagmans e.a., 1988). De twee projecten bedekken niet het volledige Noordzeegebied tot 5° van Nederland. Er zijn echter veel meer zeegravimetrieprojecten geweest, met name door engelse organisaties. Bij the British Geological Service (BGS) zijn zoveel mogelijk datasets verzameld, bewerkt en gecontroleerd op fouten (Day e.a., 1990). Door de verzameling van alle data was voor veel gebieden van de Noordzee een dubbele bedekking, waardoor controles mogelijk waren. Op basis van alle beschikbare datasets, waaronder de NAVGRAV datasets, is een zo goed mogelijk zwaartekrachtset gecreëerd. Na een zeer arbeidsintensieve vereffeningprocedure resteerden verschillen kleiner dan 1 mgal op 99,4% van de 10574 kruispunten van vaarlijnen. Voor de vereffening had ruim 8% van de kruispunten een verschil groter dan 5 mgal en bijna 31% groter dan 2 mgal. De belangrijkste foutbronnen waren instrumentdrift, calibratie van de gravimeter en havenaansluitingen. De hoogfrequente fout (meetruis) in de data wordt geschat op 1-2 mgal. Er is een $4 \times 4 \text{ km}^2$ grid berekend op basis waarvan kaarten van zwaartekrachtanomalieën met een interval van 2 mgal zijn gemaakt. De waarden zijn berekend ten opzichte van GRS67 en IGSN71. Door het bijdragen van data aan deze dataset door de FGE is deze dataset beschikbaar voor de berekening van de geoïde voor Nederland. Van BGI is ook een dataset beschikbaar met zwaartekrachtmetingen op de Noordzee. Dit zijn de oorspronkelijke vaarlijnen die beschikbaar zijn gesteld aan BGI. Deze data zijn ook gebruikt en verwerkt bij BGS, zodat de beschikbare BGS-dataset als best beschikbare mag worden verondersteld en de BGI-dataset niet apart is gebruikt. De punten van het $4 \times 4 \text{ km}^2$ grid waarvoor zwaartekrachtwaarden beschikbaar zijn, zijn weergegeven in figuur 3.5. In totaal zijn 27270 waarden gegeven.

BGS landdata Groot-Britannië, 3'x5' gemiddelde waarden

BGS heeft ook zoveel mogelijk landzwaartekrachtwaarden in Groot-Britannië verzameld. Voor grote stukken land is met een dichtheid van ongeveer 1 km gemeten. Uit deze set zijn door BGS 3'x5' gemiddelde zwaartekrachtwaarden berekend voor de Nederlandse geoïdeberekening, door middeling van de punten die zich in een blokgebiedje bevinden. In hoofdstuk 4 zal een afchatting worden gemaakt voor de precisie van de gemiddelde waarden uit deze berekening. De gemiddelde waarden bedekken het landgebied van Groot-Britannië oostelijk van $\lambda = -6^\circ$ en zuidelijk van $\varphi = 59^\circ$. Dit sluit aan bij het 5° binnengebied voor Nederland. In totaal zijn 8322 waarden gegeven, welke staan getekend in figuur 3.6. Deze waarden zijn ook gegeven ten opzichte van GRS67 en IGSN71.

Hannover, land- en zeedata, Europa, 6'x10' gemiddelde waarden

Bij de Universität Hannover in Duitsland is in 1984 een bestand met vrijelucht zwaartekrachtanomalieën voor Europa gemaakt met 6'x10' gemiddelde waarden (Torge e.a., 1984a). Een uitgebreide beschrijving van de samenstelling en analyse van deze dataset wordt gegeven door (Weber, 1984). Alle mogelijke zwaartekrachtdata die beschikbaar

waren, zijn gebruikt bij de samenstelling van deze dataset. Voor sommige landen (zoals België) zijn waarden bepaald uit een zwaartekrachtkaart. Voor het Nederlandse gebied zijn de 3'x5' gemiddelde waarden van (Bakker, 1963) gebruikt. Voor de gemiddelde zwaartekrachtenanomalieën op zowel zee als land wordt een gemiddelde foutbeschrijving gegeven. Deze is bepaald uit overlappende datasets. Voor 6'x10' waarden op zee is gegeven

$$D(\psi) = 22 \exp(-4\psi(^{\circ})) + 3 \text{ mgal}^2, \quad (3.5)$$

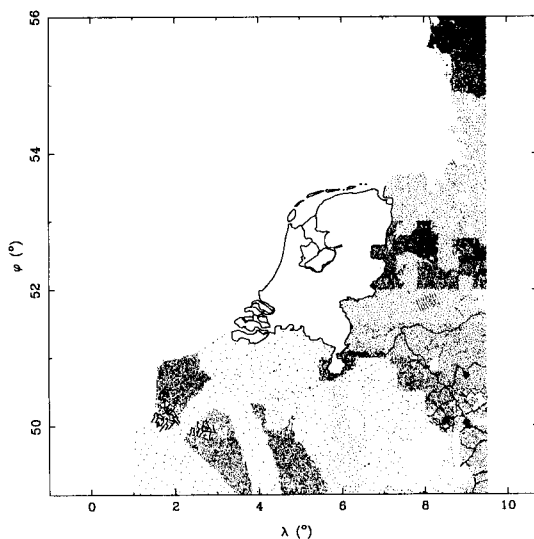
en voor landwaarden

$$D(\psi) = 40 \exp(-4\psi(^{\circ})) + 10 \text{ mgal}^2. \quad (3.6)$$

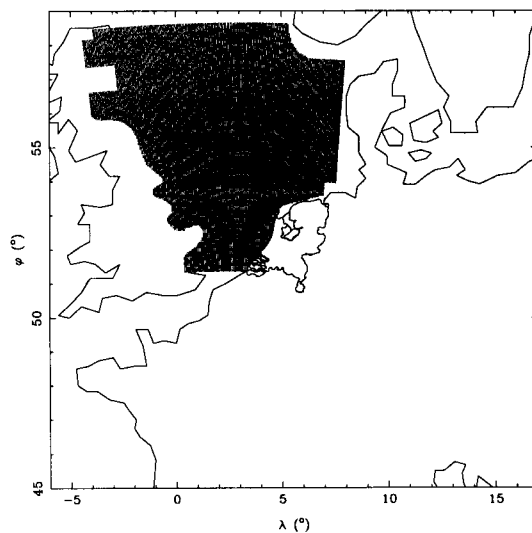
In totaal zijn 103997 gemiddelde waarden gegeven, waarvan er 37505 met interpolatie zijn berekend in lege gebieden. Het gebied dat voor de berekening van de geöïde voor Nederland van belang is ligt in $-6^{\circ} < \lambda < 17^{\circ}$ en $45^{\circ} < \varphi < 59^{\circ}$. Hierin liggen 17861 6'x10' waarden, waarvan slechts enkele geïnterpoleerde waarden. Deze waarden worden aangegeven in figuur 3.7, samen met het gebied van 5° vanaf alle Nederlandse geöïdeberekeningspunten. De zwaartekrachtenanomalieën waren oorspronkelijk gegeven ten opzichte van GRS67, later is een bestand beschikbaar gesteld met GRS80 zwaartekrachtenanomalieën.

Zwitserland, landdata, 6'x10' gemiddelde waarden

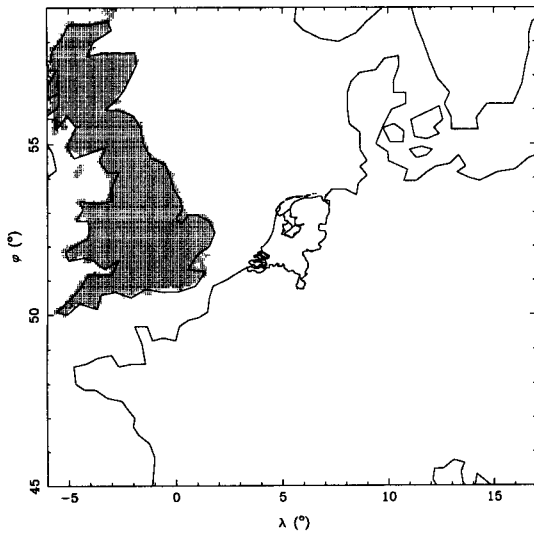
Voor een groot deel van Zwitserland zijn geen data beschikbaar in de zojuist behandelde dataset uit Hannover. In (Geiger, 1990) wordt een kaartje gegeven met gemiddelde vrijelucht zwaartekrachtenanomaliewaarden in Zwitserland. De data zijn verzameld uit verschillende bronnen. In totaal zijn 352 waarden gegeven. De waarden zijn bij de FGE uit de kaart gelezen en in een bestand geplaatst. Figuur 3.8 laat zien waar de 6'x10' gemiddelde waarden gegeven zijn. De waarden zijn gegeven ten opzichte van GRS80 en IGSN71.



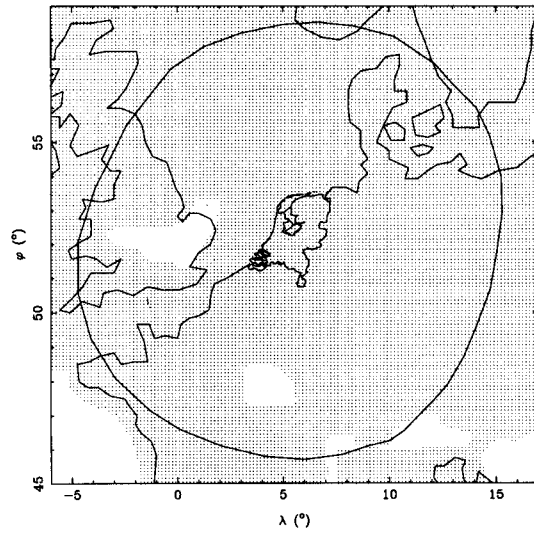
Figuur 3.4 BGI dataset, land, punt-data.



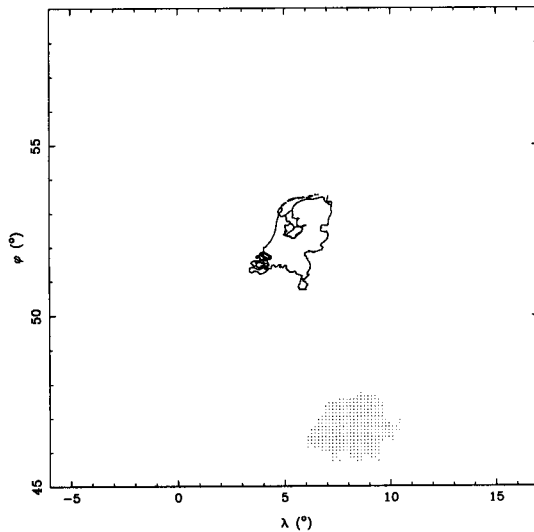
Figuur 3.5 BGS dataset, zee, 4x4 km².



Figuur 3.6 *BGS dataset, land, 3'x5'.*



Figuur 3.7 *Hannover dataset, 6'x10', met het 5° binnengebied rondom Nederland.*



Figuur 3.8 *Zwitserland, land, 6'x10'.*

Binnengebied voor Nederland

In tabel 3.1 zijn de belangrijkste gegevens van de beschikbare datasets nog eens weergegeven. Op basis van deze datasets, samen met de nieuwe Nederlandse dataset, moet een dataset met gemiddelde zwaartekrachtanomalieën worden berekend voor een gebied dat voor elk punt in Nederland een binnengebied van 5° oplevert. In hoofdstuk 4 vindt het berekenen van deze beste dataset van gemiddelde blokwaarden plaats. Nu wordt eerst een vergelijking van de datasets gegeven, voor zover ze op elkaar aansluiten of elkaar overlappen, en er wordt een analyse van de datasets gedaan. Alle datasets zijn

Tabel 3.1 Tabel van alle beschikbare zwaartekrachtdatasets voor de Nederlandse geïdeberekening.

Bestand	Gebied	Aantal	Punt/blok waarden	Dichtheid	Soort
Nieuwe 2e orde net	Nederland	7805	Punt	2 km	Vrijelucht
Atlas Nederland	Nederland	2167	Blok	3'x5'	Vrijelucht
BPM-kaarten	Nederland	10500	Punt	1.7 km	Bouguer
BGI	België Frankrijk Duitsland Denemarken	21199	Punt	2-15 km	Vrijelucht
BGS/NAVGRAV	Noordzee	27270	Punt	4 km	Vrijelucht
BGS	Groot-Britannië	8322	Blok	3'x5'	Vrijelucht
Hannover	Europa	17861	Blok	6'x'10'	Vrijelucht
Zwitserland	Zwitserland	352	Blok	6'x10'	Vrijelucht

daarvoor omgerekend naar het referentiesysteem GRS80. De transformaties vanuit andere systemen zijn gegeven in (Moritz, 1980b). Alle datasets zijn gegeven ten opzichte van IGSN71.

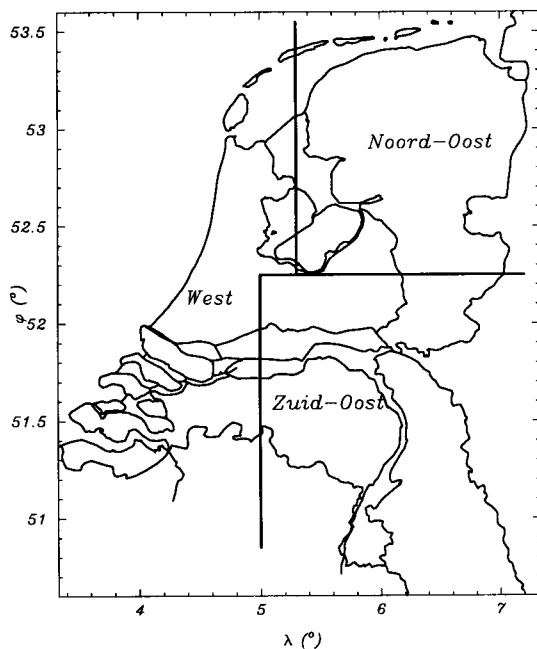
3.3 Analyse en vergelijking van de databestanden

In deze paragraaf zal een analyse worden gegeven van alle in 3.1 en 3.2 behandelde datasets. Deze analyse houdt in dat de empirische covariantiefunctie wordt bepaald, en dat histogrammen van de zwaartekrachtanomaliewaarden worden gegeven. De empirische covariantiefunctie geeft aan hoeveel variatie in het zwaartekrachtssignaal in het betreffende gebied voorkomt, en hoe het signaal gecorreleerd is in de ruimte (dus of de energie van het signaal voornamelijk voorkomt op lage frequenties of hoge frequenties). De covariantiefunctie is van belang bij collocatie en kleinste-kwadraten predictie, maar ook bij de berekening van de fout in de gemiddelde zwaartekrachtanomalieën. Na deze beschrijving van de datasets, worden de waarden uit overlappende datasets en de waarden uit tegen elkaar aanliggende datasets vergeleken.

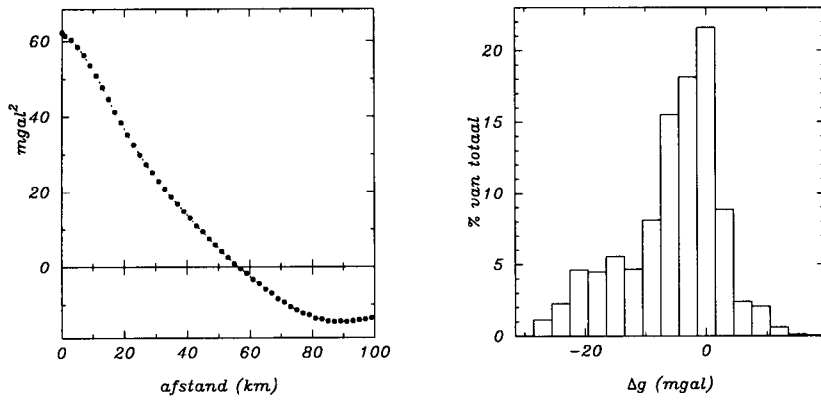
In de figuren 3.10-3.23 wordt voor elk van de datasets de empirische covariantiefunctie en het histogram van de zwaartekrachtanomalieën gegeven. In de bijbehorende tekst is vermeld welke dataset het betreft, hoeveel zwaartekrachtwaarden er in voorkomen, wat de gemiddelde waarde is, wat de rms-waarde is, en wat de minimale en maximale waarden zijn die voorkomen. Bovendien is gegeven hoe breed de balkjes van de histogrammen zijn. De rms-waarde is gelijk aan de wortel van de variantie $\sqrt{C(0)}$. De gemiddelde waarde is voor elk van de datasets verwijderd voordat de covarianties zijn berekend. De gebruikte datasets zijn dus allemaal gecentreerd. Alle weergegeven zwaartekrachtafhankelijke grootheden zijn in mgal. Voor de nieuwe Nederlandse dataset is niet alleen van zwaartekrachtanomalieën deze analyse gegeven, maar ook

van de zwaartekrachtanomalieën na aftrek van de zwaartekrachtanomaliewaarden uit OSU91A (met $N_{max} = 360$) (Rapp e.a., 1991). De covariantiefunctie van deze gereduceerde zwaartekrachtanomalieën laat beter zien wat de correlatie van de zwaartekrachtanomalieën op kleinere golflengten is. Tevens blijkt daaruit of het OSU91A-model de grote golflengten goed beschrijft, of dat nog veel langgolvig signaal over blijft. De dataset is opgesplitst voor drie gebieden in Nederland, zodat kan worden gezien of de signaalinhoud min of meer gelijk is voor verschillende gebieden (homogeen). De drie deelgebieden Noord-Oost, Zuid-Oost en West zijn weergegeven in figuur 3.9.

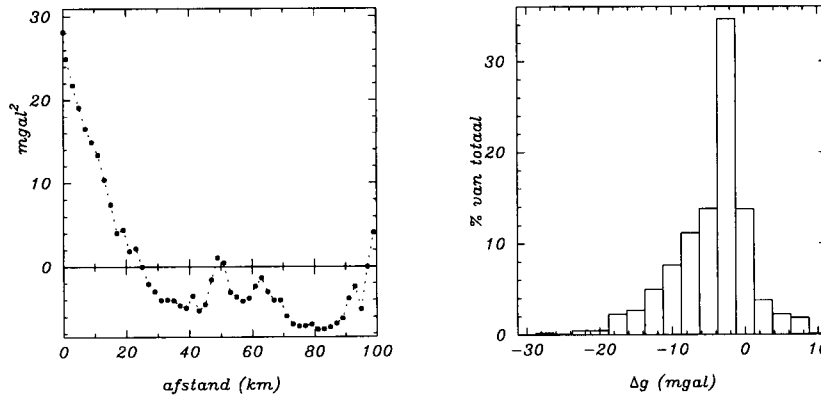
Bij de empirische covariantiefunctie zijn de variantiewaarde, de correlatielengte (de afstand waarvoor geldt $C(s) = \frac{1}{2}C(0)$), de kromming voor afstand 0, en de eerste nuldoorgang van belang. Deze parameters zijn kenmerkend voor de covariantiefunctie (Moritz, 1980a, p.174). Deze informatie wordt ook verkregen door te kijken naar de afstanden waarvoor bijvoorbeeld 90%, 50% en 10% correlatie geldt. De 90% correlatieafstand geeft aan tot op welke afstand zeer goede voorspellingen kunnen worden gedaan. Voorbij de 50% correlatieafstand is goede predictie niet meer mogelijk. De 10% correlatieafstand geeft aan tot op welke grote golflengten (lage frequenties) significant signaal aanwezig is.



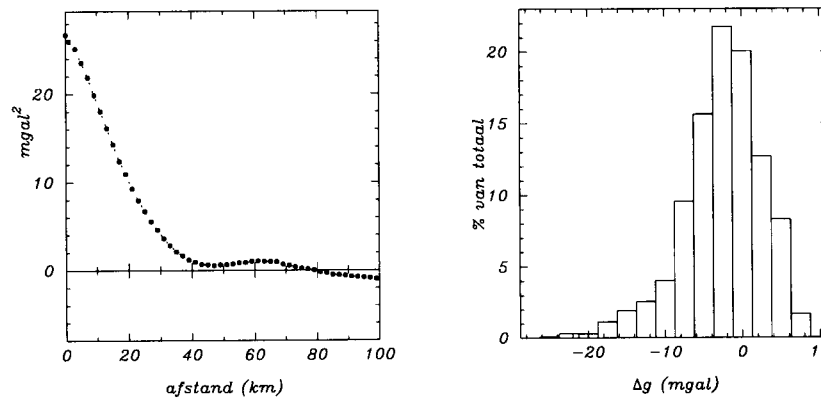
Figuur 3.9 Deelgebieden voor nieuwe Nederlandse dataset.



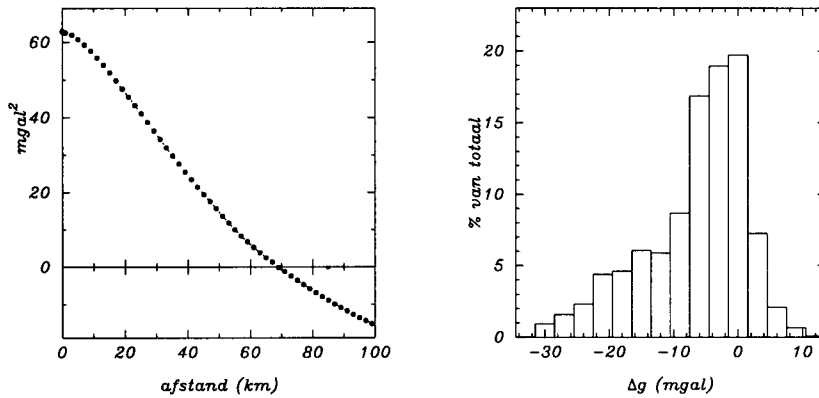
Figuur 3.10 Empirische covariantiefunctie en histogram van de nieuwe Nederlandse dataset op land. $n=7808$, gemiddelde=-5.5, rms=7.9, min=-28.7, max=19.3, stap=3.



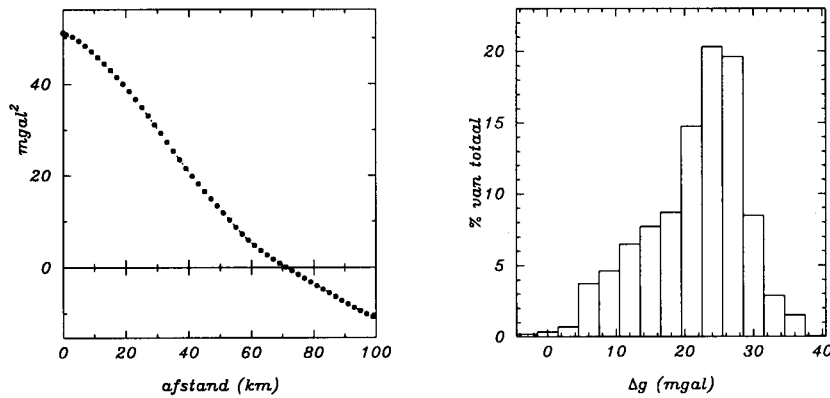
Figuur 3.11 Empirische covariantiefunctie en histogram van de dataset WADGRAV op zee. $n=3373$, gemiddelde=-4.5, rms=5.3, min=-29.3, max= 9.8, stap=2.5.



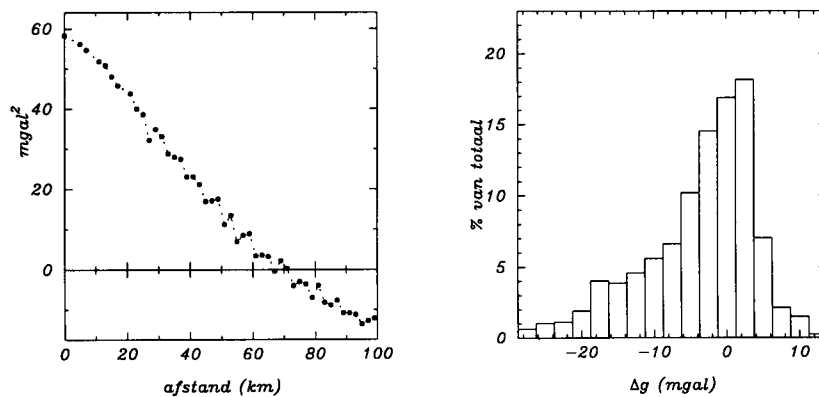
Figuur 3.12 Empirische covariantiefunctie en histogram van de Nederlandse dataset op land na aftrek van OSU91A. $n=7808$, gemiddelde=-2.5, rms=5.2, min=-26.7, max= 8.8, stap=2.5.



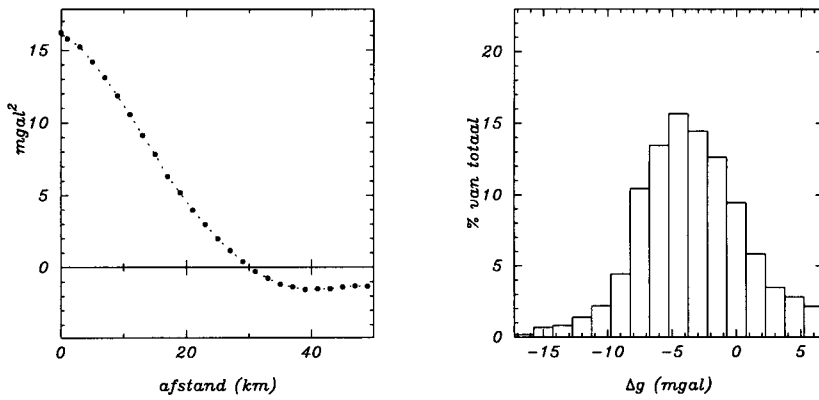
Figuur 3.13 Empirische covariantiefunctie en histogram van nieuwe de Nederlandse dataset (behalve Zuid-Limburg), Bougueranomaliën. $n=7609$, gemiddelde= -6.6 , $rms=7.9$, $min=-31.6$, $max=11.4$, $stap=3$.



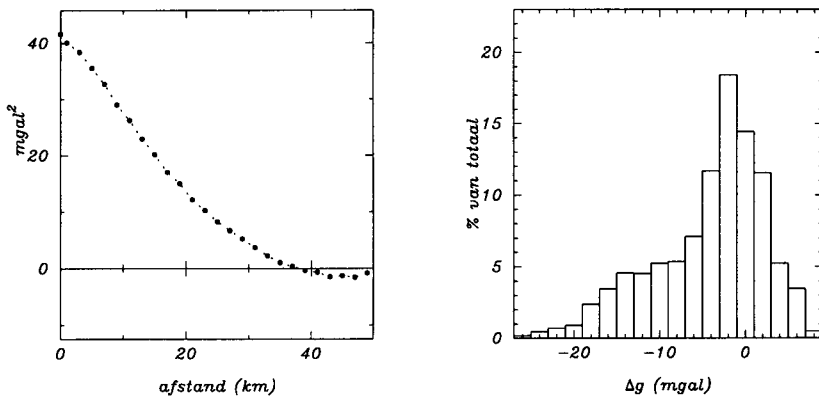
Figuur 3.14 Empirische covariantiefunctie en histogram van de BPM-dataset, Bougueranomaliën. $n=14144$, gemiddelde= 21.6 , $rms=7.2$, $min=-3.7$, $max=41.5$, $stap=3$.



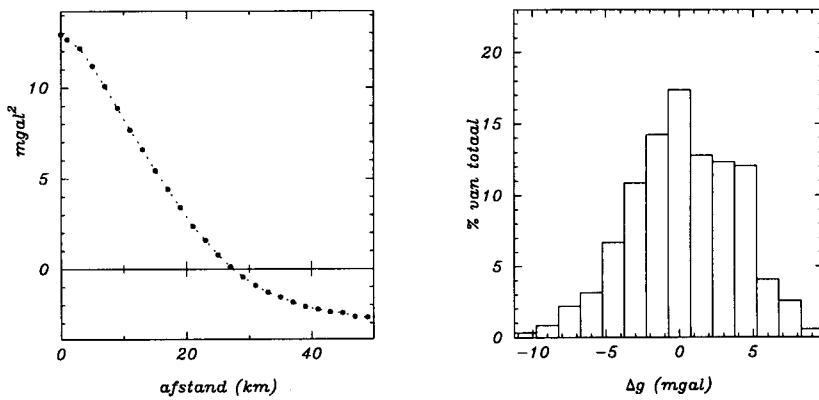
Figuur 3.15 Empirische covariantiefunctie en histogram van de dataset Atlas, $3'x5'$ gemiddelde Bougueranomaliën. $n=1267$, gemiddelde= -3.7 , $rms=7.6$, $min=-28.0$, $max=12.7$, $stap=2.5$.



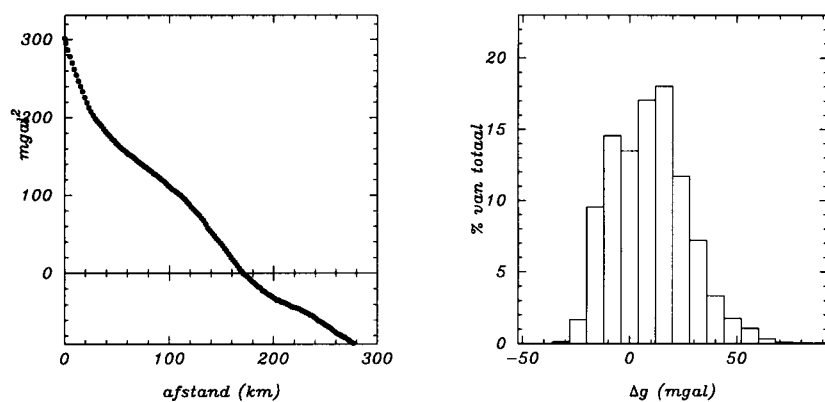
Figuur 3.16 Empirische covariantiefunctie en histogram van de nieuwe Nederlandse dataset op land na aftrek OSU91, Noord-Oost deel ($5.3 < \lambda < 7.3, 52.25 < \varphi < 53.6$). $n=2984$, gemiddelde=-3.5, rms=4.0, min=-16.1, max=6.7, stap=1.5.



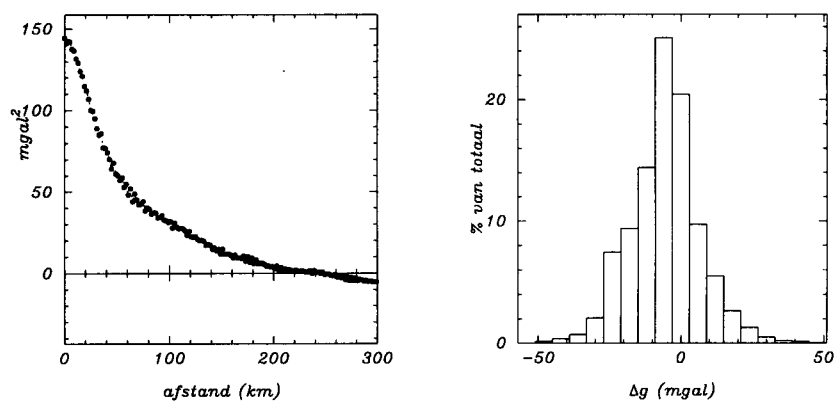
Figuur 3.17 Empirische covariantiefunctie en histogram van de nieuwe Nederlandse dataset op land na aftrek OSU91, Zuid-Oost deel ($5.0 < \lambda < 7.3, 50.6 < \varphi < 52.25$). $n=2434$, gemiddelde=-4.2, rms=6.5, min=-26.7, max=8.3, stap=2.0.



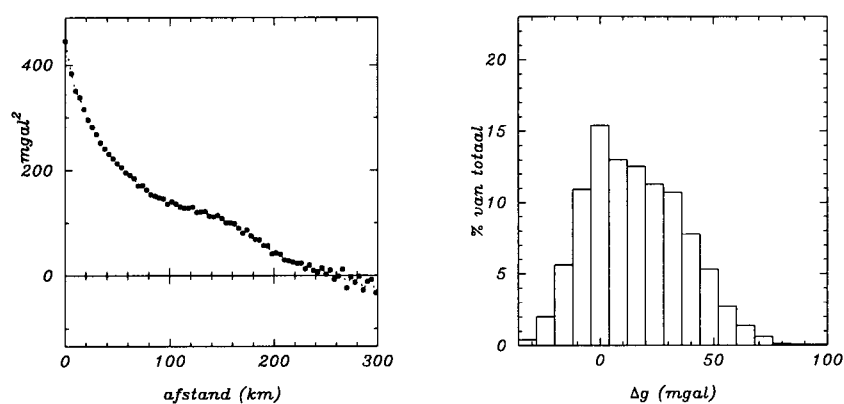
Figuur 3.18 Empirische covariantiefunctie en histogram van de nieuwe Nederlandse dataset op land na aftrek OSU91, West deel ($3.3 < \lambda < 5.0, 50.6 < \varphi < 53.6$). $n=2390$, gemiddelde=0.3, rms=3.6, min=-10.8, max= 8.8, stap=1.5.



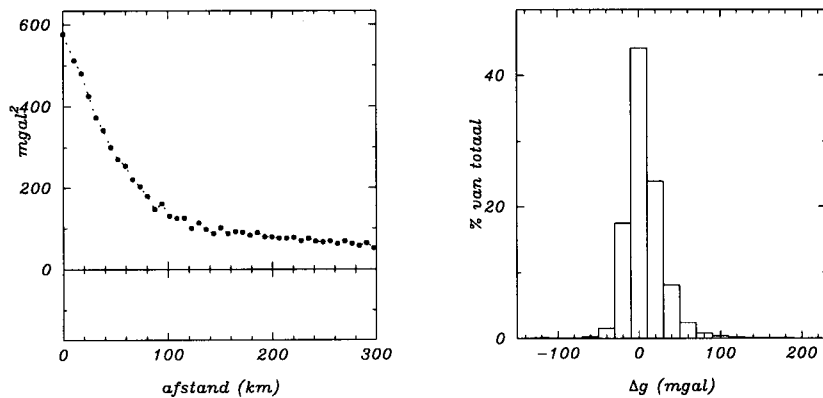
Figuur 3.19 Empirische covariantiefunctie en histogram van de BGI puntdataset op land.
 $n=21199$, gemiddelde=9.3, rms=17.4, min=-44.9, max=88.4, stap=2.



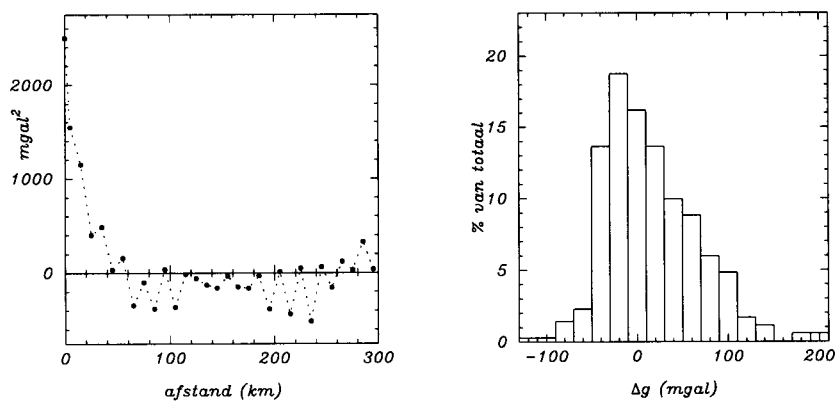
Figuur 3.20 Empirische covariantiefunctie en histogram van de BGS zeedataset.
 $n=26417$, gemiddelde=-5.5, rms=12.0, min=-51.3, max=47.3, stap=6.



Figuur 3.21 Empirische covariantiefunctie en histogram van de BGS landdataset 3'x5'.
 $n=8322$, gemiddelde=15.5, rms=21.1, min=-33.2, max=97.0, stap=8.



Figuur 3.22 Empirische covariantiefunctie en histogram van de Hannover dataset op land en zee, $6' \times 10'$. $n=17861$, gemiddelde=6.2, rms=24.0, min=-140.5, max=226.7, stap=20.



Figuur 3.23 Empirische covariantiefunctie en histogram van de dataset Zwitserland op land. $n=352$, gemiddelde=14.1, rms=50.0, min=-115.0, max=204.0, stap=20.

De informatie uit de figuren 3.10-3.23 wordt samengevat in tabel 3.2. Daarin staan van alle datasets de variantiewaarden opgenomen en de afstanden waarvoor 90%, 50% en 10% correlatie geldt. Dit is gedaan voor de datasets met zwaartekrachtanomalieën, en voor de met OSU91 gereduceerde zwaartekrachtanomalieën. Voor WADGRAV staan twee keer deze resultaten gegeven, één keer voor de dataset zoals hiervoor beschreven, en één keer waarbij per 5 punten is gemiddeld, zoals later wordt beschreven (er blijven dan 525 waarden over).

Uit de figuren 3.10-3.23 en tabel 3.2 blijkt dat de varianties en de correlatielengten van de verschillende datasets nogal variëren. Voor de volledige zwaartekrachtanomalieën komt dat voor een groot deel door de verschillende grootten van de gebieden. Bij grote gebieden kunnen langgolvlige hellingen voorkomen die een grote variantiewaarde veroorzaken. Voor de OSU91 gereduceerde zwaartekrachtanomalieën zijn de verschillen in variantie niet meer bepaald door het langgolvlige signaal, maar door de hoogfrequente zwaartekrachtvariëaties. Doordat in de datasets van BGS-land, Hannover en vooral

Tabel 3.2 Variantiewaarden (mgal^2) en correlatieafstanden (in km) voor 90%, 50% en 10% correlatie voor de volledige zwaartekrachtanomalieën en de OSU91 gereduceerde zwaartekrachtanomalieën.

Dataset	Soort	Volledige anomalieën				Gereduceerde anomalieën			
		$C(0)$ (mgal^2)	90%	50%	10%	$C(0)$ (mgal^2)	90%	50%	10%
Nederland nieuw	punt	62.2	7.2	24.0	48.7	26.7	4.3	16.1	33.3
Noord-Oost deel	punt	64.9	8.8	26.1	45.4	16.2	4.2	14.5	24.7
Zuid-Oost deel	punt	94.2	6.3	19.9	41.9	41.6	3.7	14.5	30.3
West deel	punt	13.4	4.2	14.5	28.0	12.9	4.1	13.3	23.5
Wadgrav 3373	punt	28.1	0.9	10.0	20.3	17.8	0.7	7.2	14.7
Wadgrav 525	punt	23.8	3.0	12.2	20.2	13.1	1.7	9.2	16.4
BPM Bouguer	punt	51.1	10.5	34.8	60.3	19.0	5.1	19.8	31.5
BGI	punt	301.1	6.7	64.0	153.5	70.6	1.3	8.2	20.9
BGS zee	4x4 km ²	144.3	12.6	42.0	140.0	52.5	7.1	16.6	32.0
BGS land	3'x5'	445.0	4.5	46.0	197.0	166.8	2.5	9.9	20.0
Hannover	6'x10'	576.4	9.5	48.0	283.0	143.2	1.8	8.9	24.0
Zwitserland	6'x10'	2496.4	3.4	17.3	65.0	1591.0	1.2	7.0	11.0

Zwitserland grote topografievariatiën voorkomen, komen hier grote variantiewaarden voor, veel groter dan in vlakke gebieden zoals Nederland en de Noordzee.

Uit tabel 3.2 blijkt uit de afstanden waarvoor 50% en 10% correlatie voorkomt dat er langgolvig signaal aanwezig is in de volledige zwaartekrachtanomalieën. De correlatieafstanden voor de gereduceerde zwaartekrachtanomalieën zijn veel kleiner. Per dataset is de verandering van de correlatieafstanden nogal verschillend. Dit hangt voor een groot deel af van de gebiedsgrootte. In kleine gebieden (zoals bijvoorbeeld WADGRAV) zal het langgolvige signaal vrijwel alleen bestaan uit een gemiddelde waarde, welke voor de berekening van de empirische covariantiefunctie wordt weggehaald. Voor de gereduceerde zwaartekrachtanomalieën is de gemiddelde afstand voor 50% correlatie ongeveer 15 km, en voor 10% correlatie ongeveer 30 km. Dit betekent dat voor alle datasets in en rondom Nederland het langgolvige signaal redelijk overeenkomt met het OSU91-sigitaal. Dit is van belang voor de combinatie geïdeberekening, zoals in hoofdstuk 6 zal worden bekeken.

De verschillende correlatieafstanden voor de gereduceerde zwaartekrachtanomalieën in Nederland, van de gehele nieuwe dataset en de drie deelgebieden, komen sterk overeen. De vorm van de empirische covariantiefuncties verschilt niet veel. Alleen de variantiewaarde is verschillend. Dit is van belang voor de foutberekening van de gemiddelde blokwaarden zoals in hoofdstuk 4 zal worden beschreven. De gemiddelde waarden van

de drie deelgebieden verschillen wel.

De twee resultaten van WADGRAV laten zien dat de 90% correlatieafstand groter wordt als steeds 5 punten worden gemiddeld. Dit duidt op de aanwezigheid van (hoog-frequente) meetruis. Deze blijkt ruim 4 mgal^2 te zijn. Dit was ook eerder geconcludeerd bij de beschrijving van WADGRAV.

De signaalvariantiewaarden van de gereduceerde zwaartekrachtanomalieën zijn typisch van de orde $(4 \text{ mgal})^2$ tot $(12 \text{ mgal})^2$ voor land en zee gebieden (als Zwitserland buiten beschouwing wordt gelaten). Voor de deelgebieden Noord-Oost, Zuid-Oost en West in Nederland zijn deze varianties respectievelijk $(4.0 \text{ mgal})^2$, $(6.4 \text{ mgal})^2$ en $(3.6 \text{ mgal})^2$.

Opmerkelijk is dat de variantie van de punt-Bougueranomalieën (figuur 3.14) kleiner is dan de variantie van de gemiddelde blok Bougueranomalieën uit de Atlas van Nederland (figuur 3.15). Normaal gesproken zullen gemiddelde blokwaarden een kleinere variantie hebben dan puntwaarden. Dit verschil wordt vermoedelijk veroorzaakt, doordat in de BPM-puntdataset voor het zuidoostelijke deel van Brabant en heel Limburg geen puntwaarden zijn gegeven. Bij de gemiddelde blokwaarden uit de Atlas zijn hier wel waarden beschikbaar.

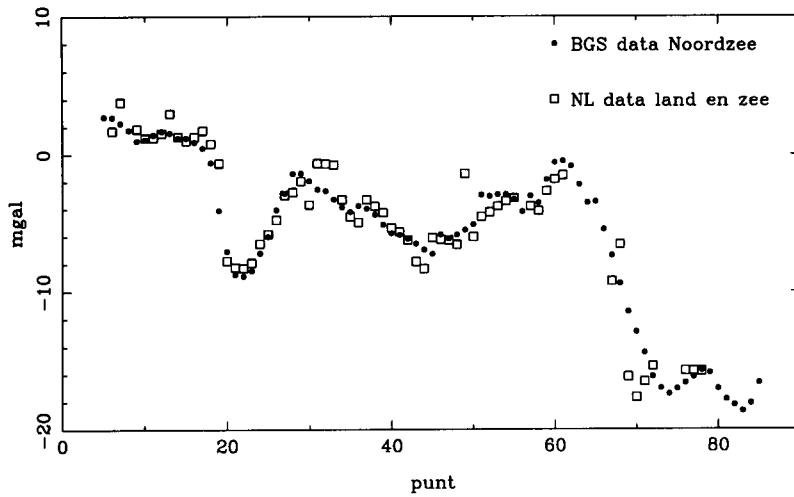
Aansluiting Noordzeekust en grens Nederland-Duitsland

Na de analyse per dataset kunnen datasets die elkaar overlappen of aan elkaar aansluiten worden vergeleken. In figuur 3.24 worden voorspelde waarden gegeven voor punten die 4 km uit elkaar liggen langs de Noordzeekust van Nederland. De waarden zijn bepaald op basis van de zwaartekrachtinformatie in de nieuwe Nederlandse dataset, en op basis van de BGS-zeedataset. Punt 5 ligt in Zeeuws-Vlaanderen, punt 55 in het Noorden van Texel, en punt 80 bij Rottumeroog. Vanaf punt 55 liggen de voorspelde punten in de Waddenzee en kunnen grotere verschillen worden verwacht omdat de bedekking door WADGRAV en de kwaliteit van WADGRAV niet zo hoog zijn. Uit figuur 3.24 blijkt dat de aansluiting van de twee datasets goed is. De verschillen zijn maximaal 1-2 mgal.

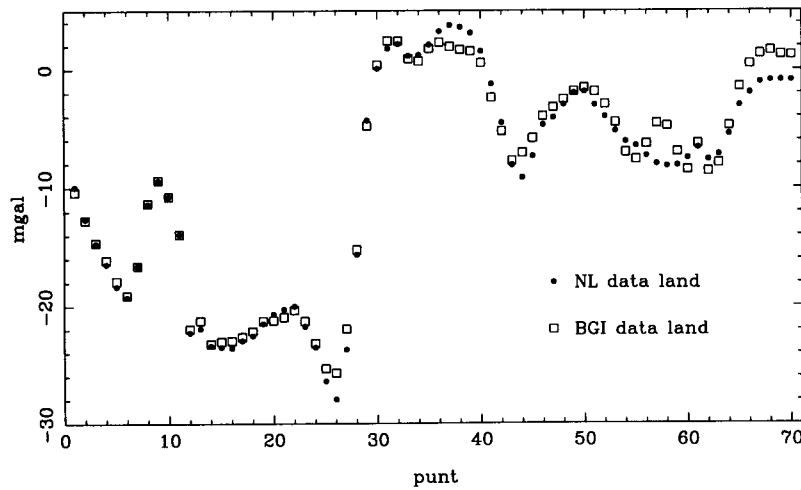
Figuur 3.25 laat een vergelijkbare test zien, ditmaal voor de grens tussen Nederland en Duitsland. Opnieuw liggen de punten ongeveer 4 km uit elkaar. De twee gebruikte datasets voor de predictie zijn de nieuwe Nederlandse data, en de BGI-landdata. Ook hier ziet de aansluiting van de predictie uit de twee datasets er goed uit. Er zitten geen systematische verschillen tussen de beide datasets in het grensgebied. Hier en daar treden grotere verschillen op doordat de predictiesituatie van één van beide datasets ongunstig is.

Nederland - landgebied

Voor het landgebied van Nederland zijn 3 datasets beschikbaar: de nieuwe Nederlandse dataset, de 3'x5' waarden uit de Atlas, en de gedigitaliseerde Bouguer-puntwaarden van BPM. Deze datasets kunnen worden vergeleken via Bougueranomalieën. De cova-



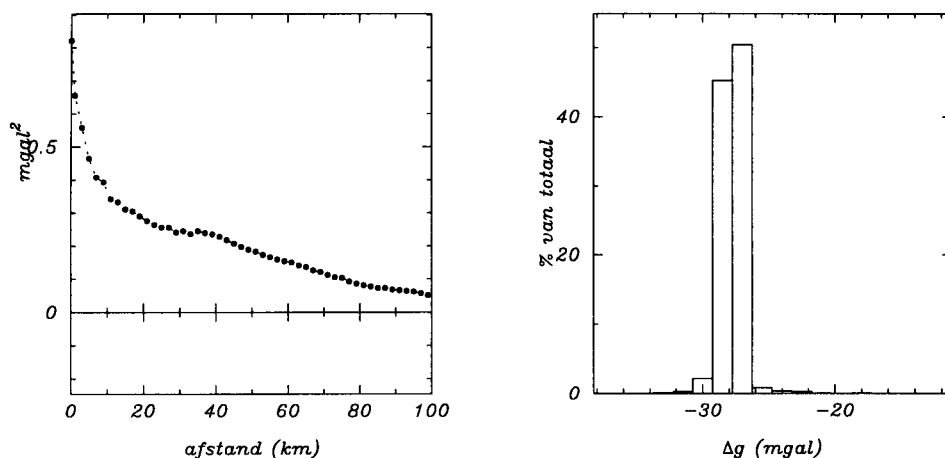
Figuur 3.24 *Predictiewaarden Noordzeekust uit nieuwe Nederlandse dataset en BGS-Noordzeewaarden.*



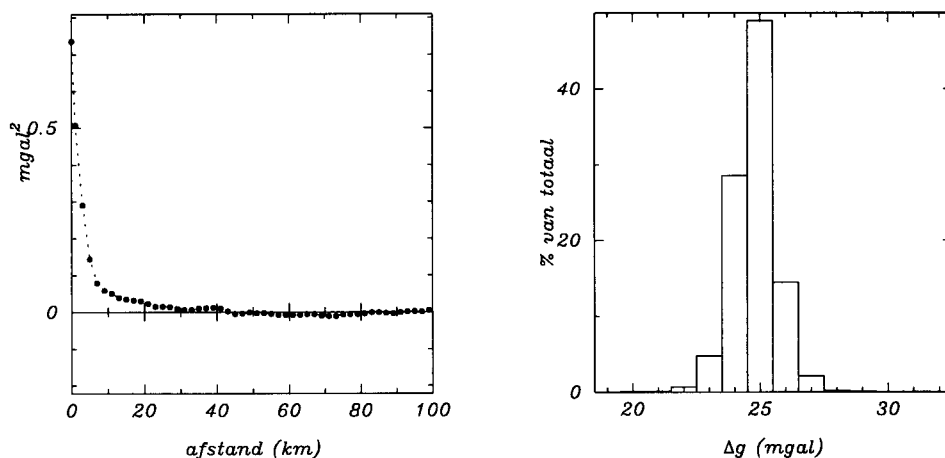
Figuur 3.25 *Predictiewaarden grens Nederland-Duitsland uit nieuwe Nederlandse dataset en BGI-land puntwaarden.*

riantiefuncties van de drie datasets zijn gegeven in de figuren 3.13-3.15. Deze covariantiefuncties lijken veel op elkaar. Er zijn wel verschillen in de variantiewaarden $C(0)$. Bovendien verschillen de gemiddelde waarden. Op basis van de gegeven waarden in de BPM-dataset, zijn op alle punten van de nieuwe Nederlandse dataset waarden berekend. Van de verschillen is een empirische covariantiefunctie berekend en een histogram gemaakt. Deze staan gegeven in figuur 3.26. Daaruit blijkt dat het verschil tussen de twee datasets een hoogfrequent karakter heeft, maar ook een langgolvige component heeft. Er is dus niet alleen meetruis op het punt zelf, maar ook een systematische fout in één of beide datasets.

Een zelfde vergelijking is gedaan voor de BPM-dataset en de Atlas-waarden. Deze



Figuur 3.26 Empirische covariantiefunctie en histogram van de verschillen tussen de nieuwe Nederlandse dataset en de BPM-dataset. $n=7441$, gemiddelde= -27.7 , $rms=0.9$, $min=-37.7$, $max=-12.4$, $stap=1.5$.



Figuur 3.27 Empirische covariantiefunctie en histogram van de verschillen tussen de Atlas-dataset en de BPM-dataset. $n=14077$, gemiddelde= 24.8 , $rms=0.8$, $min=18.7$, $max=32.3$, $stap=1$.

laatste zullen een iets gladder karakter hebben, omdat het gemiddelde waarden zijn. De empirische covariantiefunctie en het histogram van de verschilwaarden op de BPM-punten worden gegeven in figuur 3.27. Daaruit blijkt dat er een variantiewaarde geldt van ongeveer $(0.6-0.7 \text{ mgal})^2$, en dat er vrijwel geen correlatie voor afstanden groter dan nul is. Dit duidt er op dat de BPM-dataset is gebruikt om de Atlas-kaart te maken. De digitalisatie van de Atlas-kaart is zeer goed uitgevoerd en bevat geen systematische fouten. De hoogfrequente meetruis van de BPM-punten bedraagt ongeveer 0.6 mgal .

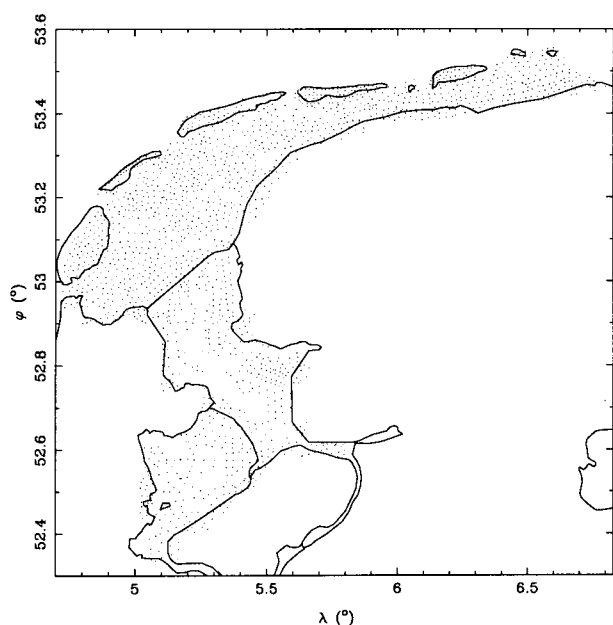
Opmerkelijk is het gemiddelde van de verschillen tussen de BPM-dataset en de twee andere datasets. Dit kan worden verklaard door een fout in de correctie van het zwaartekrachtdatum. GETECH vermeldt in een, aan de gedigitaliseerde kaarten toegevoegde, uitleg (Campbell, 1992) dat men er vanuit is gegaan dat de Bouguerwaarden zijn ge-

geven ten opzichte van het zwaartekracht datum Potsdam-1930 en de International Ellipsoïd 1930. Deze waarden zijn gecorrigeerd naar IGSN71 en GRS80. De correctie van Potsdam-30 naar IGSN71 bedraagt -13.9 mgal (Torge, 1989). Het lijkt er dus op dat GETECH de correctie met een verkeerd teken heeft aangebracht. Als deze correctie met een ander teken wordt aangebracht, dan is het gemiddelde verschil tussen de BPM-data en de nieuwe data ongeveer nul.

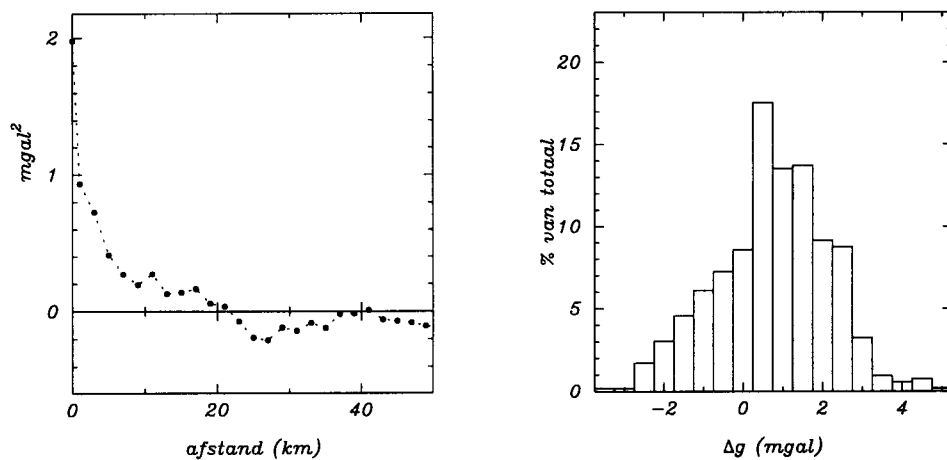
Waddenzee/IJsselmeer

Voor de Waddenzee en het IJsselmeer zijn twee datasets beschikbaar: de nieuw gemeten WADGRAV-waarden en de oude BPM-punten. Deze oude punten zijn gemeten met een gewoon landinstrument op statieven, op pijlers, of in een meetton (De Bruyn, 1951; Van Weelden, 1957). Uit de vergelijking van de landdata is duidelijk geworden dat een langgolvig (systematisch) verschil tussen de twee datasets bestaat. Dit wordt vermoedelijk door systematische fouten in de BPM-dataset veroorzaakt. Van de nieuwe dataset is bekend dat de opzet precies en betrouwbaar is, en dat eventuele systematische fouten een kleine amplitude hebben. De BPM-dataset is met minder-preciese instrumenten gemeten, en bestaat uit meerdere losse projecten (De Bruijn, 1951), waardoor het redelijk is te veronderstellen dat het langgolvige verschil door fouten in deze dataset wordt veroorzaakt. De WADGRAV-data kan daarom niet zomaar met de BPM-data worden vergeleken. Op basis van de verschillen die zijn uitgerekend op landpunten is een correctie uitgerekend voor alle BPM-punten op de Waddenzee en het IJsselmeer middels kleinste-kwadraten interpolatie. De gecorrigeerde punten zijn opgenomen in een dataset BPM-zee, die 1833 puntwaarden bevat. De verschilcorrecties zijn uitgerekend voor vrijelucht zwaartekrachtanomalieën. Deze 1833 punten geven een redelijk homogene bedekking van de Nederlandse wateren (zie figuur 3.28).

De WADGRAV-resultaten zijn bewerkt, waarbij per 5 punten het gemiddelde is genomen. Dit is gedaan om de hoogfrequente meetruis zoveel mogelijk te verwijderen. De afstand tussen de gegeven waarden is nu ongeveer 1 km, het totaal aantal waarden is 629. Op basis van de aan de nieuwe Nederlandse dataset aangepaste BPM-dataset op zee, zijn voor al deze WADGRAV-punten waarden geïnterpoleerd met kleinste-kwadraten predictie. Daarbij is een standaardafwijking van de losse punten van 0.6 mgal gebruikt, omdat dat de hoogfrequente meetruis van de BPM-data goed lijkt te beschrijven (zie de vergelijking op land). De verschillen met de gemeten WADGRAV-waarden zijn geanalyseerd. De metingen van de vaarlijn waarvan al bekend was dat grote cross-coupling effecten aanwezig waren, kwamen zeer slecht overeen. Deze zijn daarom verwijderd. Verder bleken enkele begin- en eindpunten van vaarlijnen ook nog grote verschillen op te leveren. Bij verdere bestudering van die zwaartekrachtwaarden bleken hier inderdaad nog foute waarnemingen aanwezig te zijn. De overige verschillen op de WADGRAV-vaarlijnen waren relatief klein, afgezien van een vaarlijn langs de Markerwaarddijk, waar in WADGRAV een sterke positieve anomalie is signaleerd, met een amplitudeverschil ten opzichte van de omgeving van ongeveer 10 mgal. De verschillen met de BPM-data zijn voor dit deel van de vaarlijn groot, ook met een maximale amplitude van ongeveer 10 mgal. Omdat bekend is dat zich bij WADGRAV problemen hebben voorgedaan, en de overeenkomst van de BPM-data met de overige



Figuur 3.28 Dataset van gecorrigeerde punten uit BPM-bestand op zee.



Figuur 3.29 Empirische covariantiefunctie en histogram van verschillen WADGRAV en BPM-zee. $n=525$, $gemiddelde=0.7$, $rms=1.4$, $min=-3.3$, $max= 4.7$, $stap=0.5$.

data op land en zee redelijk goed is en de verschillen nergens zo groot zijn, is besloten om ook dit deel van WADGRAV buiten de definitieve berekening te laten. Er blijven 525 waarden over. De resterende verschillen op de WADGRAV punten wordt in figuur 3.29 beschreven middels een empirische covariantiefunctie en een histogram. Daaruit blijkt dat de verschillen voornamelijk hoogfrequent van karakter zijn. De meetruis van de losse punten van WADGRAV zou volgens deze resultaten ongeveer 1.2 mgal zijn. Dit komt weer overeen met de eerder gevonden foutenmaat na middeling van 5 punten.

België

Zoals eerder vermeld is in de landdataset van BGI één bestand opgenomen met 381 puntwaarnemingen in België, met een gemiddelde afstand tussen de punten van ongeveer 15 km. Uit de zeer snelle afname van de covariantiefunctie over korte afstand van deze punten blijkt dat de metingen een standaardafwijking van 4-5 mgal hebben. De signaalvariantie van deze punten is $(13.9 \text{ mgal})^2$. Voor de samenstelling van de Hannover-dataset van 6'x10' gemiddelde waarden is gebruik gemaakt van een gedigitaliseerde zwaartekrachtkaart. Op basis van deze Hannover-dataset zijn 3'x5' waarden uitgerekend, welke natuurlijk geen signaal van golfengten kleiner dan 22 km meer bevatten. De variantie van deze data is $(10.5 \text{ mgal})^2$. Het verschil tussen de varianties van de datasets wordt niet alleen veroorzaakt door de meetruis van 4-5 mgal, maar tevens komt er een gedeelte hoogfrequent signaal in de 381 meetpunten voor. Dit hoogfrequente signaal kan ten gevolge van *undersampling* worden afgebeeld op langgolelige frequenties (dit is aliasing, zie bijvoorbeeld (Lynn, 1973)), doordat de afstand tussen de punten ongeveer 15 km bedraagt. Het is daarom beter om de waarden te gebruiken uit de Hannover-dataset, waar de aliasing-effecten vermoedelijk aanzienlijk kleiner zijn. De grootste verschillen die voorkomen tussen de gladde, langgolelige Hannover-waarden en de Belgische puntwaarden zijn ± 10 mgal.

3.4 Gebruik van de datasets

De opbouw van de Nederlandse gemiddelde-waarden-file kan nu plaats vinden op basis van alle beschikbare puntdatasets en de gemiddelde-waardendatasets. De dataset wordt opgebouwd in 5 stappen. Daar waar mogelijk worden 3'x5' waarden bepaald uit de eerste groep datasets. Vervolgens wordt daar waar geen 3'x5' waarde kan worden bepaald gebruik gemaakt van de tweede dataset, en zo voort. De volgorde waarin de totale binnengebieddataset in 5 stappen wordt uitgevoerd is

- nieuwe Nederlandse data op land, BPM-dataset op Waddenzee en IJsselmeer, WADGRAV data op Waddenzee en IJsselmeer, BGI-land (zonder België), 3'x5' in België en BGS-data op de Noordzee.
- BGS-land 3'x5'
- Zwitserland-land 6'x10'
- Hannover 6'x10'
- OSU91A

De eerste stap is de enige waarin puntzwaartekrachtwaarden worden gebruikt. Over deze stap moet enige opmerkingen worden gemaakt. De nieuwe Nederlandse dataset is de beste dataset. De BPM-zee-file geeft zeer belangrijke informatie voor Waddenzee en IJsselmeer, omdat WADGRAV alleen een te magere bedekking geeft. De BGI-punten op land rondom Nederland leveren nog relevante hoogfrequente informatie die niet in de 6'x10' data uit Hannover voorkomt. De 3'x5' data in België (berekend

Tabel 3.3 Gebruikte standaardafwijkingen en aantallen voor de verschillende puntdatasets.

Dataset	σ (mgal)	Aantal
Nieuwe Nederlandse data	0.3	7815
BPM-zee	0.6	1833
WADGRAV	1.1	525
BGS Noordzee	0.6	2356
BGI land	0.6	4067
Hannover 3'x5' België	0.6	590
Zeeuwse wateren (Atlas)	0.6	19
Noordzee/Waddenzee (Hannover)	0.6	115
Ruhrgebied (Hannover)	1.1	150

uit de Hannover 6'x10' data) en de 4x4 km² data van BGS-zee worden tegelijk met bovengenoemde datasets gebruikt om een zo glad mogelijk overgang te verkrijgen tussen de Nederlandse landdata en de data op de Noordzee en in België. De eerste stap in de berekening van gemiddelde blokwaarden is de berekening voor het gebied $3^\circ < \lambda < 8^\circ$ en $50.5^\circ < \varphi < 54^\circ$. Omdat hierin nog enkele lege plekken voorkomen, worden nog wat extra 'hulp punten' toegevoegd. In de Zeeuwse wateren zijn 19 zwaartekrachtwaarden toegevoegd die volgen uit de Atlas van Nederland-waarden, gecorrigeerd met de nieuwe en oude data op land, volgens een gelijke procedure zoals beschreven voor de Shell-data op de Waddenzee en IJsselmeer. Door de onregelmatige bedekking van de BGI-data in het zuidoostelijk deel van het gebied (d.i. ongeveer het Ruhrgebied) zijn hier 150 3'x5' waarden uit de Hannover-dataset toegevoegd. Verder zijn in het noordoostelijk deel van het genoemde gebied 115 3'x5' waarden uit de Hannover-dataset opgenomen in de Waddenzee en Noordzee. Ook hierbij is weer de correctie aangebracht op basis van nieuwe en oude data op land.

De data uit de nieuwe Nederlandse dataset en de data van BPM-zee en WADGRAV overlappen elkaar. Door de zwaartekrachtwaarden uit deze bestanden met een standaardafwijking te gebruiken in een kleinste-kwadrate predictieberekening, wordt een gewogen gemiddelde verkregen. De gebruikte standaardafwijkingen moeten dan wel klein zijn in verhouding met de signaalvariantie van de gebruikte covariantiefunctie, omdat anders een ongewenste *smoothing* plaats vindt. De standaardafwijkingen voor de verschillende puntdatasets die worden gebruikt voor de eerste stap en de aantallen punten daarin staan gegeven in tabel 3.3.

Op basis van de andere vier genoemde bestanden worden ook 3'x5' waarden bepaald. De opbouw van de totale binnengebieddataset voor de Nederlandse geoidberekening vindt dan plaats door achtereenvolgens 3'x5' waarden toe te voegen op plaatsen waar nog geen waarde uit een eerdere stap bekend is. In totaal werden 77280 (280x276) 3'x5' waarden bepaald voor het gebied $-6^\circ < \lambda < 17^\circ$ en $45^\circ < \varphi < 59^\circ$ (ongeveer

1575x1560 km²). In de eerste stap worden 4200 waarden bepaald. In de tweede stap komen daar 20156 waarden bij uit de BGS-landdataset en het resterende deel van de BGS-zee dataset. Bij de derde en vierde stap zijn dit respectievelijk 1652 (Zwitserland) en 47315 (Hannover) waarden. Er blijven dan 3957 3'x5' blokgebiedjes over, waarvoor geen waarde is gegeven. Deze worden opgevuld met OSU91A-waarden.

De dataset die is gebruikt door Van Willigen (1985) was samengesteld uit de 3'x5' waarden uit de Atlas van Nederland en de 6'x10' data uit Hannover. Het verschil binnen Nederland met de nieuwe data kan worden bepaald als er van de nieuwe data 3'x5' waarden zijn bepaald. Deze verschillen worden beschreven in paragraaf 4.5.

4 Berekening van gemiddelde blokwaarden

In dit hoofdstuk zal in detail worden ingegaan op de methoden om de gemiddelde blokwaarden uit gegeven zwaartekranchtpuntwaarden te berekenen. Na de berekening van de gemiddelde waarde zelf, wordt de foutvariantie van de gemiddelde waarde, en de foutcovarianties met de buur-gemiddelde waarden bepaald. Hier speelt de signaalcovariantiefunctie weer een belangrijke rol. Na de beschrijving van de methoden worden verschillende tests uitgevoerd om de invloed van allerlei parameters te vinden. Op basis van de testresultaten kan de beste methode worden gekozen voor de berekening van de gemiddelde zwaartekrachtwaarden. Ten slotte wordt in paragraaf 4.5 deze optimale berekeningsmethode uitgevoerd voor de puntdataset in en om Nederland. Deze wordt dan in combinatie met de overige gemiddelde blokwaarden die voor Europa beschikbaar zijn gecombineerd tot een complete binnengebieddataset met gemiddelde waarden en de bijbehorende fout(co)varianties.

4.1 Berekening van gemiddelde waarden

De gemiddelde zwaartekrachtwaarde $\overline{\Delta g}_i$ van een blokgebied i wordt berekend door integratie van de zwaartekrachtfunctie over dat gebied gedeeld door de oppervlakte

$$\overline{\Delta g}_i = \frac{1}{\text{oppervlakte blokgebied}} \int_{\varphi=\varphi_Q-\frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_Q+\frac{\Delta\varphi}{2}} \int_{\lambda=\lambda_Q-\frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_Q+\frac{\Delta\lambda}{2}} \Delta g(\varphi, \lambda) \cos \varphi \, d\lambda \, d\varphi . \quad (4.1)$$

Nemen we voor de berekening van de oppervlakte een Taylorreeks aan rondom het midden van het blokgebied i , punt Q , dan wordt de eerste term

$$\overline{\Delta g}_i = \frac{1}{\Delta\varphi\Delta\lambda \cos \varphi_Q} \int_{\varphi=\varphi_Q-\frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_Q+\frac{\Delta\varphi}{2}} \int_{\lambda=\lambda_Q-\frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_Q+\frac{\Delta\lambda}{2}} \Delta g(\varphi, \lambda) \cos \varphi \, d\lambda \, d\varphi , \quad (4.2)$$

welke voldoende precies is. Voor de berekening van de gemiddelde waarden is de continue zwaartekrachtfunctie $\Delta g(\varphi, \lambda)$ nodig. Deze is niet gegeven, en moet daarom worden berekend uit de gegeven discrete functiewaarden Δg_i . Daarbij kunnen bijvoorbeeld alle gemeten waarden worden gebruikt die binnen een bepaalde afstand ψ_r van het te berekenen punt gegeven zijn. Dan kan voor elk punt een functiewaarde worden uitgerekend en vervolgens gemiddelde blokwaarden. Dit kan echter ook in één stap worden gedaan, waarbij dan wordt geschreven

$$\overline{\Delta g}_i = \sum_{i'=1}^I \alpha_{i'} \Delta g_{i'} . \quad (4.3)$$

Hier worden I gegeven puntwaarden gebruikt, welke allemaal een gewicht $\alpha_{i'}$ krijgen, en samen de gemiddelde blokwaarde $\overline{\Delta g_i}$ geven. De gewichten $\alpha_{i'}$ kunnen op allerlei manieren worden gekozen. Enkele voorbeelden van predictiemethoden worden gegeven in (Heiskanen&Moritz, 1967), waaronder representatie, nulgewicht en kleinste-kwadraten. Er bestaan veel andere predictiemethoden waarvan er enkele worden behandeld door (Hein&Lenze, 1979). In verband met hun gunstige eigenschappen zullen we ons hier alleen concentreren op de kleinste-kwadraten methode en de representatie methode. Bij de representatie methode krijgen alle beschikbare functiewaarden een zelfde gewicht $\alpha_{i'} = \frac{1}{I}$, zodat

$$\overline{\Delta g_i} = \frac{1}{I} \sum_{i'=1}^I \Delta g_{i'} . \quad (4.4)$$

De gewichten van kleinste-kwadraten predictie zijn

$$\alpha_{i'} = \overline{C}_{Q_{i'}} (C_{i'i''})^{-1} , \quad (4.5)$$

met

$$\overline{C}_{Q_{i'}} = \frac{1}{\Delta\varphi\Delta\lambda \cos\varphi_Q} \int_{\varphi=\varphi_Q-\frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_Q+\frac{\Delta\varphi}{2}} \int_{\lambda=\lambda_Q-\frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_Q+\frac{\Delta\lambda}{2}} C(\psi_{(\varphi,\lambda),i'}) \cos\varphi \, d\lambda \, d\varphi . \quad (4.6)$$

waardoor weer een vorm van de algemene kleinste-kwadraten collocatieformule (2.28) wordt gevonden

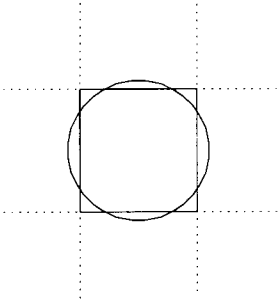
$$\overline{\Delta g_i} = \overline{C}_{Q_{i'}} (C_{i'i''})^{-1} \Delta g_{i'} . \quad (4.7)$$

Men kan ook kleinste-kwadraten predictie met meeneming van de meetruis uitvoeren (zie Moritz, 1980a, p.102) wat wordt beschreven door

$$\overline{\Delta g_i} = \overline{C}_{Q_{i'}} (C_{i'i''} + D_{i'i''})^{-1} \Delta g_{i'} . \quad (4.8)$$

De uiteindelijke waarden van de gemiddelde blokwaarden zullen, buiten de gegeven meetwaarden $\Delta g_{i'}$, afhangen van de keuze van de interpolatiemethode (d.i. keuze van de gewichten) en van de grootte van het steungebied. Dat is het gebied waarvan de metingen worden gebruikt voor de berekening. Eén voor de hand liggende keuze van het steungebied is het blokgebied zelf. Hier worden alleen de puntwaarden gebruikt die zijn gegeven binnen het blokgebied waarvoor de gemiddelde waarde wordt bepaald. Echter, als bijvoorbeeld uit een kaart gemiddelde waarden worden bepaald dan zal men automatisch ook kijken naar hoe het functieverloop buiten het blokgebied is. In het bijzonder als de functie een grillig (hoogfrequent) verloop heeft kan dit een heel ander beeld opleveren dan als alleen de gegeven functiewaarden binnen het blokgebied in ogenschouw worden genomen. De invloed van deze steungebiedkeuze zal straks worden bekeken voor de Nederlandse dataset.

Als kleinste-kwadraten predictie wordt gebruikt voor de berekening van gemiddelde blokwaarden, wordt in de fysisch-geodetische praktijk vaak een benadering aangebracht



Figuur 4.1 *Situatie met een vierkant en een cirkelvormig gebied waarvoor een gemiddelde waarde wordt bepaald.*

die rekentijd bespaart. In plaats van een vierkant gebied, zoals in (4.6), kan het gemiddelde bepaald worden voor een cirkelvormig gebied. De oppervlakte en middelpunt van dit cirkelvormige gebied worden gelijk gekozen aan die van een vierkant gebied. Dit is weergegeven in figuur 4.1. De gemiddelde waarde wordt dan berekend door

$$\overline{\Delta g}_i = \frac{1}{2\pi(1 - \cos \psi_i)} \int_{\psi=0}^{\psi_i} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \Delta g(\psi, \alpha) \sin \psi \, d\alpha \, d\psi . \quad (4.9)$$

Voor kleinste-kwadraten predictie kan dit worden uitgerekend met

$$\overline{\Delta g}_i = \overline{C}_{Q_{i'}} (C_{i' i''})^{-1} \Delta g_{i''} , \quad (4.10)$$

waarbij $\overline{C}_{Q_{i'}}$ wordt uitgerekend met behulp van β_n -coëfficiënten (zie bijlage B), als

$$\overline{C}(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n c_n P_n(\cos \psi) , \quad (4.11)$$

als de covariantiefunctie $C(\psi)$ van zwaartekrachtenanomalieën wordt gegeven door (A.17). De middelingsoperator, die een convolutie op de bol is, kan als een vermenigvuldiging met de spectrale coëfficiënten in het spectrum plaats vinden. Dit is wederom een voorbeeld van de algemene kleinste-kwadraten collocatieformule (2.28).

4.2 Berekening van foutvarianties en foutcovarianties

De fout in de gemiddelde blokwaarde bestaat uit twee componenten, een commissiedeel en een omissiedeel. De ruis van de metingen die worden gebruikt, zal ook een bepaalde ruis voor de gemiddelde waarde opleveren. Als alle gegeven puntwaarden een standaardafwijking σ hebben, dan zal de gemiddelde waarde berekend volgens (4.4) een commissiefout $\frac{1}{\sqrt{I}}\sigma$ hebben. Naast deze commissiefout zal er ook een omissiefout zijn. Deze wordt meestal predictiefout of interpolatiefout genoemd. Zelfs als de gegeven metingen foutloos zouden zijn, dan wordt op alle andere punten van het blokgebied waar een functiewaarde wordt geschat (impliciet) een interpolatiefout gemaakt. Een schatting voor deze fout kan worden bepaald middels de volgende procedure, waarbij

(Heiskanen&Moritz, 1967, paragrafen 7.6 en 7.9) wordt gevolgd. De fout in de gemiddelde waarde is

$$\varepsilon_i = \overline{\Delta g_i} - \widehat{\Delta g_i} = \overline{\Delta g_i} - \sum_{i'=1}^I \alpha_{i'} \Delta g_{i'} , \tag{4.12}$$

waarin $\overline{\Delta g_i}$ de echte gemiddelde blokwaarde is, en $\widehat{\Delta g_i}$ de geschatte gemiddelde blokwaarde. De indices zonder accent ' geven gemiddelde blokwaarden aan, de indices met accent ' geven puntwaarden aan.

Deze fout zelf kan niet worden bepaald, maar wel kan de fout(co)variantie worden berekend (zie (Heiskanen&Moritz, 1967) voor de afleiding):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= M\{\varepsilon_i \varepsilon_j\} = M\left\{\left(\overline{\Delta g_i} - \sum_{i'=1}^I \alpha_{i'} \Delta g_{i'}\right) \left(\overline{\Delta g_j} - \sum_{j'=1}^J \alpha_{j'} \Delta g_{j'}\right)\right\} \tag{4.13} \\ &= \overline{\overline{C_{ij}}} - \sum_{i'=1}^I \alpha_{i'} \overline{C_{i'j}} - \sum_{j'=1}^J \alpha_{j'} \overline{C_{ij'}} + \sum_{i'=1}^I \sum_{j'=1}^J \alpha_{i'} \alpha_{j'} C_{i'j'} . \end{aligned}$$

Hierin is

$$\begin{aligned} \overline{\overline{C_{ij}}} &= \frac{1}{\Delta\varphi^2 \Delta\lambda^2 \cos\varphi_{Q_i} \cos\varphi_{Q_j}} \\ &\int_{\varphi=\varphi_{Q_i}-\frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_{Q_i}+\frac{\Delta\varphi}{2}} \int_{\lambda=\lambda_{Q_i}-\frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_{Q_i}+\frac{\Delta\lambda}{2}} \int_{\varphi=\varphi_{Q_j}-\frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_{Q_j}+\frac{\Delta\varphi}{2}} \int_{\lambda=\lambda_{Q_j}-\frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_{Q_j}+\frac{\Delta\lambda}{2}} C(\psi_{(\varphi,\lambda)_i}(\varphi,\lambda)_j) \tag{4.14} \\ &\cos\varphi_i \cos\varphi_j d\lambda_i d\varphi_i d\lambda_j d\varphi_j . \end{aligned}$$

Voor de foutvariantie, die een bijzonder geval van de foutcovariantie is, wordt (4.13)

$$\sigma_i^2 = \overline{\overline{C}}(0) - 2 \sum_{i'=1}^I \alpha_{i'} \overline{C_{i'}} + \sum_{i'=1}^I \sum_{i''=1}^I \alpha_{i'} \alpha_{i''} C_{i'i''} . \tag{4.15}$$

Kiest men als predictiemethode voor de gemiddelde blokwaarden kleinste-kwadraten predictie (4.5), dan wordt dit

$$\sigma_i^2 = \overline{\overline{C}}(0) - \overline{C_{i'}} (C_{i'i''})^{-1} \overline{C_{i''}} . \tag{4.16}$$

Het is duidelijk dat de signaalcovariantiefunctie $C(\psi)$ een cruciale rol speelt bij de beschrijving van de fout. De interpolatiefout hangt af van hoe goed het signaal op een bepaalde afstand kan worden voorspeld. Als de signaalfunctie over korte afstanden veel kan variëren, dan kan niet goed worden voorspeld en zal de predictiefout groot zijn. Verandert het signaal echter niet noemenswaardig over een bepaalde afstand, dan kan een goede gemiddelde waarde worden geschat met predictie. De signaalcovariantiefunctie geeft aan hoe de gemiddelde correlatie (men mag ook denken, verandering) van

het signaal over een bepaalde afstand is. Dit is ook de reden waarom hieraan zoveel aandacht is besteed in hoofdstuk 2 en hoofdstuk 3, en waarom de covariantiefunctie is berekend voor deelgebieden van Nederland.

De totale fout(co)variantie bestaat uit de twee delen, de interpolatiefout en de meetruisvoortplanting, en kan worden beschreven als

$$\sigma_{ij} = \overline{\overline{C}}_{ij} - \sum_{i'=1}^I \alpha_{i'} \overline{C}_{i'j} - \sum_{j'=1}^J \alpha_{j'} \overline{C}_{j'i} + \sum_{i'=1}^I \sum_{j'=1}^J \alpha_{i'} \alpha_{j'} C_{i'j'} + \sum_{i'=1}^I \sum_{j'=1}^J \alpha_{i'} \alpha_{j'} D_{i'j'}, \quad (4.17)$$

waarin $D_{i'j'}$ de foutcovariantiematrix met de meetruis van de metingen is. Deze matrix komt uit de vereffening van het zwaartekrachtnet. In hoofdstuk 3 is al beschreven dat een algemene uitdrukking voor deze meetruis wordt gebruikt, welke wordt gegeven door (3.2). In (4.17) kan worden gezien dat de laatste twee termen ook gecombineerd kunnen worden.

Aan de formules voor de foutcovariantie zien we dat er correlaties tussen de fouten van de gemiddelde blokwaarden optreden. Dit geldt ook als alleen de gegeven punten binnen de blokgebieden worden gebruikt, dus als alle puntwaarden maar voor één blokwaarde worden gebruikt. Dit komt doordat de predictiefout van de gemiddelde waarde een signaalgrootte is, en geen meetfout. De predictiefout hangt sterk af van het signaal zelf, en wordt dan ook beschreven met de signaalcovariantiefunctie. De commissiefout, de voortplanting van de meetruis, veroorzaakt geen correlatie tussen de fouten van de gemiddelde waarden als de meetruis van de gegeven punten niet gecorrigeerd is. Als de meetruis wel gecorrigeerd is, dan zal dat ook nog een extra bijdrage aan de correlatie tussen de fouten van de gemiddelde waarden tot gevolg hebben.

4.3 Keuze van datadichtheid en blok grootte

Nu gegeven is hoe de gemiddelde blokwaarden en de fout(co)varianties ervan worden berekend, zal aandacht worden geschonken aan de grootte van de blokgebieden waarvoor gemiddelde waarden worden bepaald. Deze grootte hangt af van de maximaal toegestane discretisatiefout zoals is behandeld in paragraaf 2.5. Ook de datadichtheid hangt hiermee samen. De datadichtheid, d.i. de afstand tussen de meetpunten, hangt af van hoeveel amplitude het hoogfrequente zwaartekrachtssignaal heeft, en wat de invloed daarvan is op de geöide. Om een grove indruk te krijgen van het belang van een bepaald zwaartekrachtssignaal voor de geöide kan gebruik worden gemaakt van de vuistregel

$$\lambda = \frac{2\pi R}{n} \quad (4.18)$$

om de bij een bepaalde graad n behorende golflengte λ te bepalen. Met behulp van de eigenwaarde tussen zwaartekrachtanomalieën en geöidehoogten vinden we dan

$$N_{\lambda} \text{ (cm)} = \frac{R}{\gamma(n-1)} \Delta g_{\lambda} = \frac{R}{\gamma \frac{2\pi R}{\lambda}} \Delta g_{\lambda} \approx \frac{\lambda \text{ (km)}}{62} \Delta g_{\lambda} \text{ (mgal)}. \quad (4.19)$$

Hierin geeft λ de golflengte aan, en N_λ en Δg_λ de amplitudes op die golflengte van respectievelijk geïdehoogte en zwaartekrachtanomalie. Komt in het zwaartekrachtssignaal bijvoorbeeld een frequentie voor met een golflengte van 10 km, met een amplitude van 10 mgal, dan geeft dat een geïde-amplitude van 1.6 cm op die frequentie. Als men verwacht dat op frequenties van 10 km en korter nog zulke sterke amplitudes voorkomen, en men wil cm-geïde precisie bereiken, dan moet een zwaartekrachtmetnet worden gemeten dat deze golflengten kan oplossen/bepalen, de afstand tussen de meetpunten moet dan kleiner dan 5 km worden gekozen. Afhankelijk van de puntafstand kan tot een bepaalde frequentie worden opgelost.

Als een dataset is gegeven met een bepaalde punt dichtheid die voldoende is om het aanwezige signaal te beschrijven, dan moet een bepaalde blok grootte voor de numerieke integratie worden gekozen. Het heeft geen zin de blok grootte kleiner te kiezen dan de puntafstanden, omdat de bijbehorende frequenties niet kunnen worden omgezet. Als, zoals in het Nederlandse geval, de puntafstanden gemiddeld 2 km zijn, kunnen bijvoorbeeld blokgebieden worden gekozen van 1.5'x2.5', 3'x5' of 6'x10'. Hoe groter het blokgebied wordt gekozen, hoe minder hoogfrequente informatie wordt overgehouden. Echter, hoe kleiner de blok grootte, hoe meer rekenwerk moet worden verricht. Bovendien moeten er genoeg puntwaarden in (en rondom) het blokgebied liggen om een goede gemiddelde waarde te kunnen bepalen. De blok grootte wordt zo gekozen dat deze zo groot mogelijk is, zonder dat te veel hoogfrequente informatie verloren gaat waardoor een grote discretisatiefout wordt gemaakt. In paragraaf 4.4 bij de numerieke tests, zullen gemiddelde blokwaarden voor verschillende blok grootten worden bepaald. Tevens wordt bekeken of bij kleine blok grootten nog significante afwijkingen optreden ten opzichte van grotere blok grootten.

De keuze van de datadichtheid en de blok grootte worden in de praktijk al bepaald voor dat de metingen zijn uitgevoerd. De blok grootte en datadichtheid volgen namelijk uit de precisie-eis voor de geïde. Voor Nederland hield dat in dat de discretisatiefout van sub-cm niveau zou zijn, en dat de fout in de geïde ten gevolge van de fout in de gemiddelde waarden binnen Nederland (meetruisvoortplanting en interpolatiefout) kleiner dan 1 cm is ($\sigma_{\Delta N} < 1$ cm). Op basis van deze voorwaarden, en het gemeten testgebied in De Peel (Nohlmans, 1990), is geconcludeerd dat dit met een datadichtheid van ongeveer 1 punt per $(2.5 \text{ km})^2$ zeker mogelijk moet zijn. Dit zal opnieuw worden aangetoond in hoofdstuk 6. Bij het schatten van de predictiefout heeft de signaalcovariantiefunctie van het testgebied De Peel een belangrijke rol gespeeld. In het Peelgebied komen, door de voor Nederland relatief grillige geologische ondergrond, de grootste lokale zwaartekrachtvariatiën voor. De punt dichtheid die volgt voor dit Peelgebied is dus ook goed genoeg voor de rest van Nederland. Het hele Nederlandse net is na de Peel-test opgezet, waarbij de dichtheid nog iets hoger is geworden in verband met de lokaties van de hoogtepeilmerken waarop is aangesloten, namelijk 2 km.

4.4 Tests gemiddelde-blokwaardenberekening

Voor de berekening van gemiddelde waarden en fout(co)varianties van gemiddelde waarden kunnen verschillende tests worden uitgevoerd. De tests voor de bepaling van ge-

middelde waarden zijn uitgevoerd met de puntzwaartekrachtwaarden zoals beschreven in het vorige hoofdstuk. Voor de berekening van de fout(co)varianties is gebruikt gemaakt van twee testdatasets. De eerste bestaat uit punten die precies in het midden liggen van 3'x5' blokgebieden. De berekeningssituatie is voor ieder blok hetzelfde en de fout(co)varianties hoeven dan ook maar één keer te worden berekend. De andere testdataset bestaat uit de puntdata uit de hierboven genoemde puntdataset voor het gebied $51.5^\circ < \varphi < 52.5^\circ$ en $4.5^\circ < \lambda < 6.0^\circ$, wat ongeveer $111 \times 103 \text{ km}^2$ is. Dit gebied bedekt precies 360 (20x18) 3'x5' blokgebieden. Voor de 120 (12x10) blokgebieden in het centrale deel hieruit, kunnen foutvarianties worden berekend en foutcovarianties met alle buurblokken tot op 4 blokken afstand in beide richtingen (φ - en λ -richting).

Deze testberekeningen zijn gedaan met verschillende parameters waarvan de invloed wordt bekeken. De testresultaten worden allemaal bij elkaar gepresenteerd, waarna per testonderwerp de resultaten zullen worden besproken voor beide testdatasets. Het verdient aanbeveling uit de getabelleerde resultaten eerst alleen de vergelijking per onderwerp te volgen. De verschillende parameters waarvoor tests zijn uitgevoerd betreffen

- de grootte van het steungebied,
- de predictiemethode,
- de blok grootte,
- de gebruikte covariantiefunctie, en
- de punt dichtheid van de puntdataset.

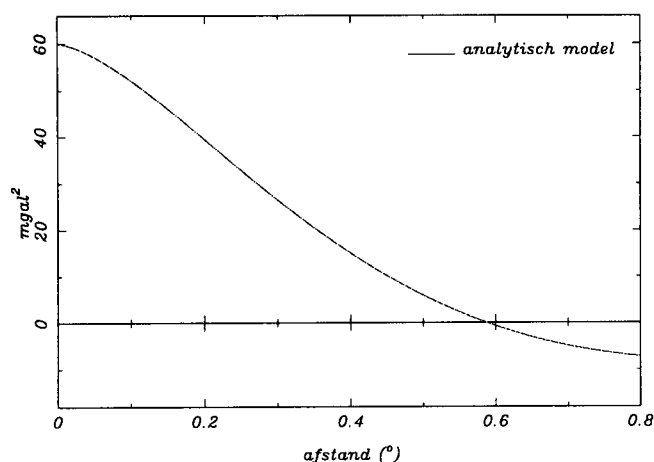
De covariantiefunctie die is gebruikt bij alle testberekeningen wordt beschreven door het analytische model

$$C(s) = C_o \left(1 - \left(\frac{s}{d} \right)^\alpha \right) \exp \left(- \left(\frac{s}{d} \right)^\alpha \right), \quad (4.20)$$

met C_o de variantie, d de eerste nuldoorgang, en α een parameter die de kromming beïnvloedt. De parameters die zijn gebruikt zijn $C_o = 60 \text{ mgal}^2$, $d = 0.588^\circ = 65.3 \text{ km}$, en $\alpha = 1.5$. Met deze parameters sluit de functie goed aan bij de empirische covariantiefunctie van de Nederlandse zwaartekrancht anomalieën (zie ook tabel 3.2). Dit model is ook gebruikt in (De Min, 1990) waar is getoond dat deze functie prettige eigenschappen heeft om een goede aanpassing bij de empirische covariantiefunctie te verkrijgen. De hier gebruikte variantiewaarde heeft geen invloed op de resultaten zelf, alleen op de fout(co)varianties. Bovendien is die invloed alleen maar een simpele schaling zodat de fout(co)varianties voor andere waarden van C_o eenvoudig kunnen worden omgerekend. De gebruikte covariantiefunctie staat afgebeeld in figuur 4.2.

Steungebied

Zoals al opgemerkt in paragraaf 4.1 is een voor de hand liggende manier voor het berekenen van gemiddelde blokwaarden, om de gegeven puntwaarden te gebruiken die binnen het blokgebied liggen. Aan de andere kant betekent dit vaak dat aan de buitenrand van het blokgebied een extrapolatie wordt uitgevoerd. Als punten die net buiten het

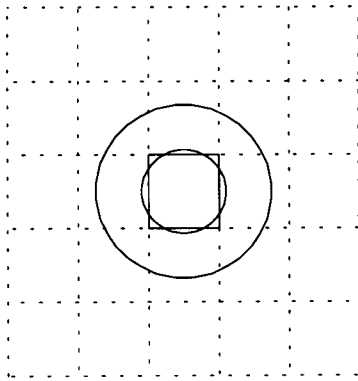


Figuur 4.2 Covariantiefunctie die is gebruikt bij de tests, volgens (4.20), met $C(0) = 60$ $mgal^2$, $d = 0.588^\circ$ en $\alpha = 1.5$.

blokgebied liggen ook worden gebruikt wordt een beter predictieresultaat verwacht. Dit gebeurt ook als met het oog een waarde in een kaart wordt bepaald, waarbij ook met de omliggende functiewaarden rekening wordt gehouden. Als de foutvariantie wordt beschouwd, dan wordt verwacht dat deze beter (kleiner) wordt als ook punten buiten het blokgebied worden gebruikt. Een betere schatting is mogelijk. De foutcorrelatie met buurblokwaarden zal groter worden. Doordat punten voor meerdere aan elkaar grenzende blokgebieden worden gebruikt, zal meer correlatie ontstaan tussen de fouten van de blokwaarden.

Op basis van de puntwaarden in een geselecteerd gebied in Nederland ($4.5^\circ < \lambda < 5.5^\circ$, $51.65^\circ < \varphi < 52.35^\circ$) zijn gemiddelde blokwaarden berekend voor gebieden van 3'x5' ($\approx 5.6 \times 5.6 \text{ km}^2$). Dit is gedaan op basis van alle punten binnen zo'n blokgebied en tevens voor olopende grootte van het steungebied, waarbij een steungebied is gebruikt tot een afstand ψ_r vanaf het middelpunt van het blokgebied. Als $\psi_r = 3.1 \text{ km}$ heeft het steungebied dezelfde oppervlakte als het eigenlijke vierkante blokgebied. Voor olopende grootte van ψ_r zijn gemiddelde blokwaarden berekend met (4.7), waarbij 8x8 numerieke berekeningspunten in het blokgebied zijn gebruik. Dit aantal is voldoende om geen significante verandering van de gemiddelde waarde en de (co)varianties meer te krijgen. Als de grootte van het steungebied ψ_r groter wordt dan 15 km, dan treedt er geen verandering meer op van de gemiddelde waarden. De resultaten daarvan worden daarom als referentie gebruikt. Gemiddeld zijn daarbij zo'n 120 steunpunten gebruikt. De verschillen tussen deze referentiewaarden en de waarden van andere keuzes voor het steungebied zijn weergegeven in tabel 4.1. Hieruit blijkt dat vanaf $\psi_r > 7 \text{ km}$ geen significante verandering van het resultaat meer voorkomt. Voor de berekening van fout(co)varianties zal daarom worden gekeken naar de gevallen waarbij het steungebied het blokgebied zelf is, en waarbij $\psi_r = 0.06^\circ \approx 7 \text{ km}$. De situatie van deze steungebieden is weergegeven in figuur 4.3.

Met alle puntzwaartekrachtwaarden uit testdataset 2 zijn gemiddelde waarden uitgerekend voor 360 3'x5' gebieden in midden Nederland, met als steungebied de blokgebie-



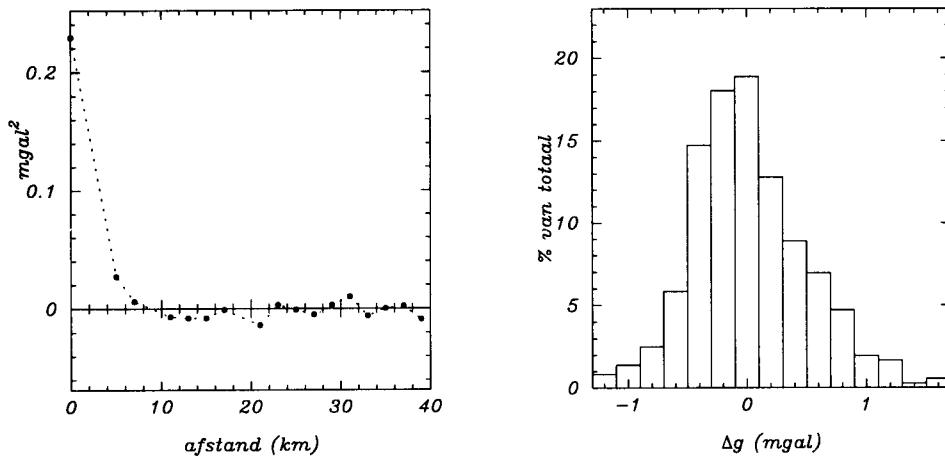
Figuur 4.3 Steungebieden: blokgebied zelf ($5.6 \times 5.6 \text{ km}^2$), $\psi_r = 3.1 \text{ km}$ en $\psi_r = 7 \text{ km}$.

den zelf, en met als steungebied $\psi_r = 0.06^\circ$. De empirische covariantiefunctie van het verschil tussen deze twee gevallen worden gegeven in de figuren 4.4 en 4.5 voor respectievelijk representatie gewichten en kleinste-kwadraten gewichten. Geconcludeerd kan worden dat de verschillen bij representatie (rms=0.48 mgal) groter zijn dan bij kleinste-kwadraten predictie (rms=0.15 mgal), waarbij optimaal gebruik wordt gemaakt van de beschikbare punten, omdat hun ligging in rekening wordt genomen. Als het grootste verschil (de uitschieter -1.833, met 4 punten in het betreffende blokgebied) wordt weggelaten verkleint de rms-waarde naar 0.11 mgal. Er is geen correlatie in met buurblokken voor kleinste-kwadraten gewichten, en slechts 10% correlatie met de directe buurblokken bij representatie gewichten. De verschillen zijn een lokaal, hoogfrequent effect.

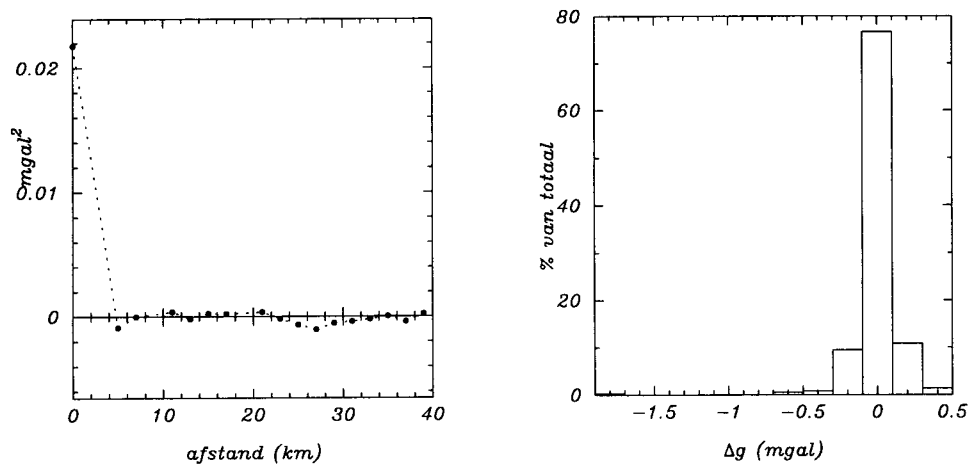
Na de analyse van de gemiddelde waarden zelf worden nu de foutvarianties en fout-covarianties van de gemiddelde blokwaarden bekeken. In tabel 4.2 worden de resulta-

Tabel 4.1 Vergelijking van gemiddelde blokwaarden met resultaten op basis van een steungebied met $\psi_r = 15 \text{ km}$, in mgal. \bar{n} is het gemiddeld aantal punten in het steungebied.

Steungebied	\bar{n}	gemiddelde	rms	$\ \max\ $
binnen blok	7	0.022	0.075	0.417
$\psi_r = 3.1 \text{ km}$	6	0.049	0.126	0.617
$\psi_r = 4.0 \text{ km}$	9	0.013	0.066	0.389
$\psi_r = 5.0 \text{ km}$	14	-0.003	0.034	0.128
$\psi_r = 6.0 \text{ km}$	20	-0.005	0.018	0.067
$\psi_r = 7.0 \text{ km}$	30	-0.002	0.012	0.068
$\psi_r = 8.0 \text{ km}$	41	-0.001	0.008	0.069
$\psi_r = 10.0 \text{ km}$	55	0.000	0.006	0.062
$\psi_r = 12.0 \text{ km}$	80	0.000	0.002	0.012



Figuur 4.4 Empirische covariantiefunctie en histogram van verschillen ten gevolge van verschillende steungebieden (resp. blokgebied en $\psi_r = 0.06^\circ$), voor representatie gewichten. $n=360$, gemiddelde = 0.016, rms=0.479, min=-1.258, max= 1.587, stap=0.2.



Figuur 4.5 Empirische covariantiefunctie en histogram van verschillen ten gevolge van verschillende steungebieden (resp. blokgebied en $\psi_r = 0.06^\circ$), voor kleinste-kwadraten gewichten. $n=360$, gemiddelde=-0.001, rms=0.148, min=-1.833, max= 0.426, stap=0.2.

ten gegeven van testdataset 1 waarbij één punt is gegeven in het midden van elk 3'x5' blokgebied. Alle testresultaten staan hier bij elkaar, maar hier wordt nu alleen gekeken naar de invloed van de grootte van het steungebied. Uit tabel 4.2 wordt duidelijk dat voor de representatie methode de foutvariantie groter wordt als een groter steungebied wordt gebruikt. Dit is ook logisch. Als het éne punt in het blokgebied zelf hetzelfde gewicht krijgt in de berekening als alle punten in de buurblokken, dan is dat in dit geval maar 20%. De gemiddelde blokwaarde zal voor het grootste deel (80%) worden bepaald door de gegeven puntwaarden in buurblokken. Omdat deze punten ver weg liggen kan de gemiddelde waarde daaruit nooit erg goed worden bepaald. Als alleen het punt in het blok zelf wordt gebruikt levert dat een betere waarde op. Omdat deze

Tabel 4.2 Resultaten voor foutvarianties en foutvolume voor de testdataset met 1 punt in het midden van elk blokgebied van 3'x5'. Rep. staat voor representatie, kk staat voor kleinste-kwadraten. Alle resultaten in mgal.

covariantiefunctie	methode	steun- gebied	$\sqrt{\sigma}$	$\sqrt{\sigma_{\text{vol}}}$	correlatiebeschrijving
$c0 = 60$	rep	blokgebied	0.911	0.833	geen
$d = 0.288^\circ$	rep	$\psi_r = 0.06^\circ$	1.177	0.890	veel dichtbij, beetje - ver weg
$\alpha = 1.5$	kk	blokgebied	0.868	1.536	beetje overal
3'x5'	kk	$\psi_r = 0.06^\circ$	0.582	0.890	veel dichtbij, ver weg niets
$c0 = 60$	rep	blokgebied	0.526	0.508	geen
$d = 0.588^\circ$	rep	$\psi_r = 0.06^\circ$	0.656	0.780	veel dichtbij, beetje - ver weg
$\alpha = 1.5$	kk	blokgebied	0.517	0.844	beetje overal
3'x5'	kk	$\psi_r = 0.06^\circ$	0.338	0.514	veel dichtbij, ver weg niets
$c0 = 60$	rep	blokgebied	0.261	0.247	geen
$d = 0.588^\circ$	rep	$\psi_r = 0.06^\circ$	0.875	0.606	veel dichtbij, beetje - ver weg
$\alpha = 1.5$	kk	blokgebied	0.257	0.316	beetje overal
6'x10'	kk	$\psi_r = 0.06^\circ$	0.214	0.247	veel dichtbij, ver weg niets

berekeningsmethode voor gemiddelde blokwaarden niet logisch is, en ook nooit wordt toegepast in de praktijk, blijft ze verder buiten beschouwing.

Wordt kleinste-kwadraten predictie gebruikt, dan levert het gebruik van punten in buurblokken wel betere resultaten op. Hierbij worden namelijk op een gunstige manier de gewichten verdeeld, zo dat het enkele punt in het blokgebied het meeste gewicht krijgt en de omliggende punten minder. Te voorspellen punten vlak bij de rand van het blokgebied met een buurblok kunnen het beste worden bepaald door gebruik te maken van de beide punten in deze blokken. Voor de verschillende randen van het blokgebied (noord, oost, zuid en west) worden steeds andere punten uit andere buurblokken gebruikt, maar wel steeds het éne punt in het blokgebied zelf. De verdeling van de gewichten is nu zo, dat de kleinste variantie wordt bereikt, dus de beste waarde wordt bepaald. De gewichten zijn in dit geval respectievelijk 0.66 voor het punt in het blokgebied, en 0.085 voor elk van de vier buurblokpunten.

De correlaties voor deze eerste testdataset geven een nogal gevarieerd beeld. Voor de representatie methode met als steungebied alleen het blokgebied, is vrijwel geen correlatie. Dit wordt ook gezien aan het foutvolume (berekend volgens (2.68)), dat niet veel afwijkt van de foutvariantie. Bij kleinste-kwadraten predictie met het blokgebied zelf als steungebied is het correlatiepercentage vrij klein (enkele procenten), maar blijft deze correlatie ook aanwezig met buurblokken die ver weg liggen. Als het steungebied groter is, met de eerste buurblokken erbij, dan is de correlatie met deze eerste buurblokken groter, maar met de overige blokken verwaarloosbaar klein. Dit blijkt ook uit de foutvolumes, welke voor de twee steungebieden respectievelijk ongeveer 3 en 2 keer

zo groot zijn als de foutvarianties. Er is een significante correlatie die de foutvolumes aanzienlijk doet afwijken van de foutvarianties.

De resultaten van de tweede testdataset staan weergegeven in de tabellen 4.3-4.6. Voor een enkel blokgebied (hier even centrale blokgebied genoemd) kunnen de foutvariantie en de foutcovarianties met buurblokken worden berekend. Voor de posities van de omliggende blokken bestaat veel symmetrie. Het bovenbuurblok ligt even ver weg als het onderbuurblok en de beide zijbuurblokken. Evenzo liggen de buurblokken op afstand $(+2\Delta\lambda, +1\Delta\varphi)$, $(+1\Delta\lambda, +2\Delta\varphi)$, $(-2\Delta\lambda, -1\Delta\varphi)$, et cetera, even ver weg doordat de blokgebieden vierkant zijn. Voor een enkel centraal blokgebied kan dan de gemiddelde foutcorrelatie worden berekend met buurblokken die op een bepaald afstand liggen van het centrale blokgebied. Dit is gedaan voor buurblokken in het omliggende gebied van 9×9 blokken, dus in totaal 80 foutcovariantiewaarden per centraal blokgebied.

Deze berekening is gedaan voor 120 centrale blokgebieden, met elk hun eigen omliggende buurblokken. Van deze 120 centrale blokken wordt vervolgens de gemiddelde correlatie met buurblokken die op een bepaalde relatieve afstand van het centrale blok liggen berekend. De gemiddelde waarde van de correlaties

$$\bar{\rho} = \text{gemiddelde} \left(\frac{\sigma_{\Delta g \Delta g'}}{\sigma_{\Delta g}^2} \cdot 100\% \right) \quad (4.21)$$

en de variatiemaat (rms) van de correlaties over die afstand

$$\text{rms}_{\rho} = \text{rms} \left(\frac{\sigma_{\Delta g \Delta g'}}{\sigma_{\Delta g}^2} \cdot 100\% \right) \quad (4.22)$$

zijn weergegeven in de tabellen 4.3-4.6. Daarbij geeft de positie in het schema de relatieve blokpositie aan. Het blokje linksonder staat voor het centrale blokgebied zelf. De correlatie is daar altijd 100%, en dat geldt voor alle 120 blokken dus de rms-waarde van deze correlatiewaarden is automatisch 0. Voor de buurblokken, die worden voorgesteld door de andere blokjes in het schema, staan de gemiddelde correlatiepercentages en de rms-waarden daarvan gegeven. De bovenste waarde is de gemiddelde correlatie $\bar{\rho}$, de onderste waarde de rms-waarde rms_{ρ} .

Linksboven in de tabel staat de wortel van de gemiddelde waarde van de 120 foutvarianties $\sqrt{\sigma^2}$ gegeven. Daarnaast staat de wortel van de gemiddelde waarde van de 120 foutvolumes $\sqrt{\sigma_{\text{vol}}^2}$ (zie bladzijde 47). Eronder staan de wortels van de rms-waarden van respectievelijk de foutvarianties rms_{σ^2} en de foutvolumes $\text{rms}_{\sigma_{\text{vol}}^2}$. Een regel lager staat hoeveel punten gemiddeld voorkomen in de 120 steungebieden \bar{n} , en daaronder het minimale $\min(n)$ en het maximale $\max(n)$ aantal punten dat voorkomt in de 120 steungebieden. In de tabellen 4.3-4.6 worden op deze manier de resultaten van verschillende testberekeningen gepresenteerd. De verschillen ten gevolge van verschillende grootten van het steungebied volgen uit de tabellen 4.5 en 4.6.

Tabel 4.3 Representatie, $\psi_r = \text{blokgebied}$.

$\sqrt{\sigma^2} = 0.275$		$\sqrt{\sigma_{\text{vol}}^2} = 0.275$		0
$\sqrt{\text{rms}_{\sigma^2}} = 0.245$		$\sqrt{\text{rms}_{\sigma_{\text{vol}}^2}} = 0.381$		9
$\bar{n} = 7$				0
4-13				14
		1	-1	0
		17	12	11
$\bar{\rho}$	2	0	1	0
rms ρ	27	20	16	11
100	3	2	1	0
0	34	23	17	12

Tabel 4.4 Kl.kwadrateen, $\psi_r = \text{blokgebied}$, gewichten zonder ruis.

$\sqrt{\sigma^2} = 0.157$		$\sqrt{\sigma_{\text{vol}}^2} = 0.182$		0
$\sqrt{\text{rms}_{\sigma^2}} = 0.137$		$\sqrt{\text{rms}_{\sigma_{\text{vol}}^2}} = 0.178$		6
$\bar{n} = 7$				0
4-13				2
		1	-1	0
		21	15	1
$\bar{\rho}$	0	-3	0	0
rms ρ	23	33	24	15
100	-1	-1	-1	-1
0	26	19	21	45

Tabel 4.5 Kl.kwadrateen, $\psi_r = 0.06^\circ$, gewichten zonder ruis.

$\sqrt{\sigma^2} = 0.102$		$\sqrt{\sigma_{\text{vol}}^2} = 0.108$		0
$\sqrt{\text{rms}_{\sigma^2}} = 0.065$		$\sqrt{\text{rms}_{\sigma_{\text{vol}}^2}} = 0.068$		9
$\bar{n} = 31$				0
20-42				0
		0	0	0
		0	0	0
$\bar{\rho}$	0	0	0	0
rms ρ	1	0	0	0
100	3	0	0	0
0	5	0	0	0

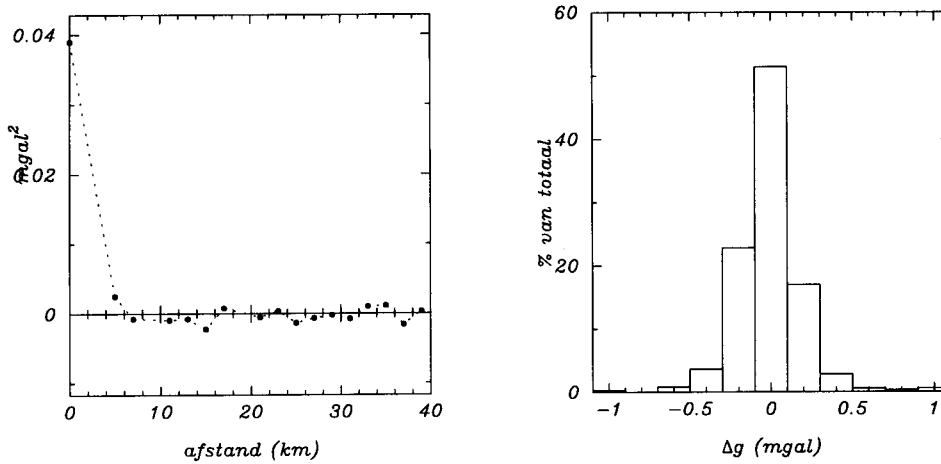
Tabel 4.6 Kl.kwadraten, ψ_r = blokgebied, gewichten met ruis.

$\sqrt{\sigma^2} = 0.157$		$\sqrt{\sigma_{\text{vol}}^2} = 0.172$		0
$\sqrt{\text{rms}_{\sigma^2}} = 0.137$		$\sqrt{\text{rms}_{\sigma_{\text{vol}}^2}} = 0.152$		9
$\bar{n} = 7$		0	0	0
4-13		2	2	1
		0	0	0
		1	2	1
$\bar{\rho}$	1	0	0	0
rms_{ρ}	3	2	2	2
100	0	0	0	0
0	6	2	3	1

Als eerste valt op dat als alleen de punten in het blokgebied zelf worden gebruikt dit er gemiddeld 7 zijn, terwijl voor een steungebied van ongeveer 7 km vanaf het blokmiddelpunt dat er 31 zijn.

Bij kleinste-kwadraten predictiegewichten blijkt ook weer een vrij sterke overeenkomst te bestaan met de resultaten van de eerste testdataset. Voor een 0.06°-steungebied is er enige correlatie met directe buurblokken, en geen met andere blokken. Voor het blokgebied-steungebied is de correlatie overal gering. Daarbij valt op dat een groot verschil optreedt tussen de gevallen waarbij de kleinste-kwadraten gewichten met of zonder meetruis zijn uitgerekend (zie tabellen 4.4 en 4.6). De verschillen komen niet voor in de gemiddelde correlaties, maar wel in de rms-waarden van de correlaties. Het verschil wordt waarschijnlijk veroorzaakt doordat de matrix-inversie stabiel is als de ruis wordt toegevoegd, zelfs als dit een zeer kleine ruismaat is. De gemiddelde variantiewaarde bij een blokgebied-steungebied is voor kleinste-kwadraten predictie groter dan voor een 0.06°-steungebied, zoals wordt verwacht. De variantie is ongeveer een factor 2.4 groter, net als bij de eerste testdataset. Het foutvolume is voor een 0.06°-steungebied vrijwel gelijk aan de variantie, doordat er slechts enkele buurblokken zijn waarvan de fout enigszins gecorreleerd is. Voor een blokgebied-steungebied is het foutvolume iets groter dan de variantie, ongeveer een factor 1.3.

Concluderend kan worden gesteld dat de varianties bij de kleinste-kwadraten methode kleiner zijn dan bij representatie methode, en dat voor kleinste-kwadraten gewichten een beter resultaat wordt bereikt met een groter steungebied dan het blokgebied zelf. Dit is allemaal volgens de verwachtingen. Het gemiddelde percentage correlatie tussen fouten in de blokwaarden is over het algemeen heel klein. Voor blokgebied-steungebieden kunnen lokaal wel grotere correlaties optreden bij zowel representatie gewichten als kleinste-kwadraten gewichten zonder het gebruik van de ruis, wat volgt uit de rms-waarden van de correlaties. Wat vooral opvalt is dat bij kleinste-kwadraten gewichten met een blokgebied-steungebied meer correlatie optreedt dan bij een 0.06°-steungebied, waar alleen met de directe buurblokken enige correlatie is en verder helemaal geen. Dit is niet helemaal wat men zou verwachten, omdat hierbij gegeven meetwaarden



Figuur 4.6 Empirische covariantiefunctie en histogram van verschillen ten gevolge van verschillende predictiemethoden (representatie en kleinste-kwadraten), voor een steungebied gelijk aan het blokgebied. $n=360$, gemiddelde= -0.012 , $rms=0.198$, $min=-1.019$, $max=1.018$, $stap=0.2$.

worden gebruikt voor meerdere tegen elkaar liggende blokgebieden. Kennelijk is de gewichtsverdeling over deze punten per blokgebied zo verschillend dat er juist heel weinig (of eigenlijk zelfs geen) significante correlatie ontstaat. Voor dit geval van kleinste-kwadraten gewichten met een 0.06° -steungebied worden de kleinste variantiewaarden bereikt, met de minste correlatie (d.i. kleinste foutvolumes).

Predictiemethode

De meest eenvoudige keuze van de gewichten bij de bepaling van de gemiddelde blokwaarden is representatie, ofwel simpele middeling van de punten in een blokgebied. Kleinste-kwadraten predictie vergt een hoop meer rekenwerk, maar heeft dan ook als voordeel dat er rekening wordt gehouden met de onderlinge ligging van de steunpunten. Twee punten die heel dicht bij elkaar liggen krijgen samen ongeveer evenveel gewicht als een punt dat geïsoleerd ligt. Bovendien heeft, zoals de naam van de methode al zegt, de geschatte gemiddelde waarde de kleinste foutvariantie (die natuurlijk alleen maar reëel is als de gebruikte covariantiefunctie de juiste is). Als de gegeven steunpunten exact regelmatig verdeeld liggen, en de blok grootte is een stuk kleiner dan de correlatielengte van de covariantiefunctie, dan zullen de gewichten voor elk van de steunpunten bij kleinste-kwadraten predictie vrijwel gelijk zijn aan die van representatie. In de praktijk liggen de punten nooit zo mooi regelmatig, waardoor er verschillen zullen optreden tussen de resultaten en de fouten van de twee methoden. Op basis van dezelfde testdataset 2 als hiervoor is gebruikt, worden gemiddelde blokwaarden uitgerekend voor blokgebieden van $3' \times 5'$ in Nederland. Dit is gedaan voor beide predictiemethoden, representatie en kleinste-kwadraten, met als steungebied het blokgebied zelf.

Voor de verschillen in de resultaten tussen de twee predictiemethoden zijn de empirische covariantiefunctie en een histogram berekend. Deze staan gegeven in figuur 4.6 voor het blokgebied zelf als steungebied. Wederom is de ruimtelijke correlatie verwaarloosbaar,

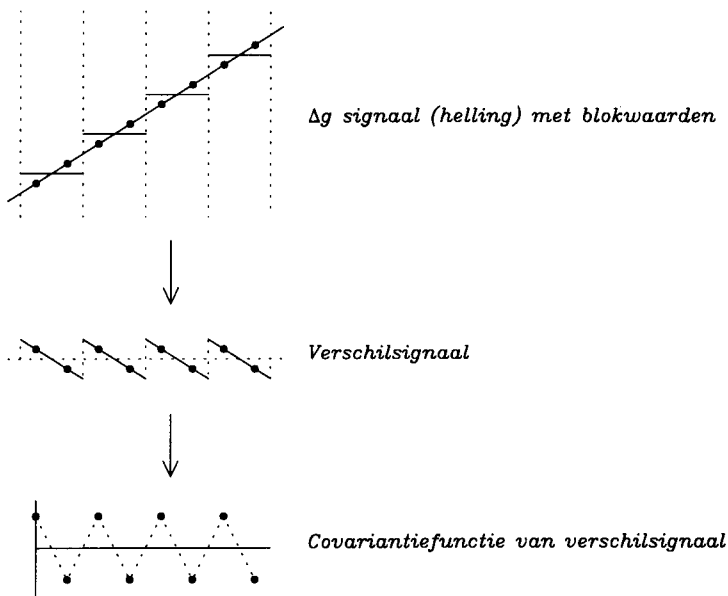
het is een lokaal effect. De variantie van de verschillen is vrij klein (ongeveer $(0.2 \text{ mgal})^2$) voor een steungebied gelijk aan het blokgebied. Dit komt doordat er per blokgebied gemiddeld 7 punten zijn gegeven, die redelijk regelmatig verdeeld liggen over het blokgebied, zodat zowel met representatie als kleinste-kwadraten predictie een goede schatting mogelijk is.

Tabel 4.2 geeft de resultaten van de foutvarianties en foutcovarianties voor de eerste testdataset met één punt per blokgebied, en de tabellen 4.3-4.6 voor de tweede testdataset. Uit tabel 4.2 blijkt dat bij een blokgebied-steungebied slechts kleine verschillen optreden tussen de gemiddelde varianties voor beide methoden. Dit sluit aan bij de hierboven beschreven verschillen van de resultaten zelf. Verder valt op dat bij kleinste-kwadraten predictie de correlatie met buurblokfouten positief is, want het foutvolume is groter dan de variantie. Bij representatie is de correlatie meestal negatief, en is het foutvolume kleiner dan de variantie.

Uit de tabellen 4.3 en 4.6 blijkt dat bij de tweede testdataset met gemiddeld 7 punten per blokgebied, de variantie van kleinste-kwadraten veel beter is. Bij representatie met blokgebied-steungebied is er nog enige correlatie (het foutvolume is ongeveer 1.5 keer zo groot als de variantie), bij kleinste-kwadraten predictie met een blokgebied-steungebied is er gemiddeld vrijwel geen correlatie.

Blokgrootte

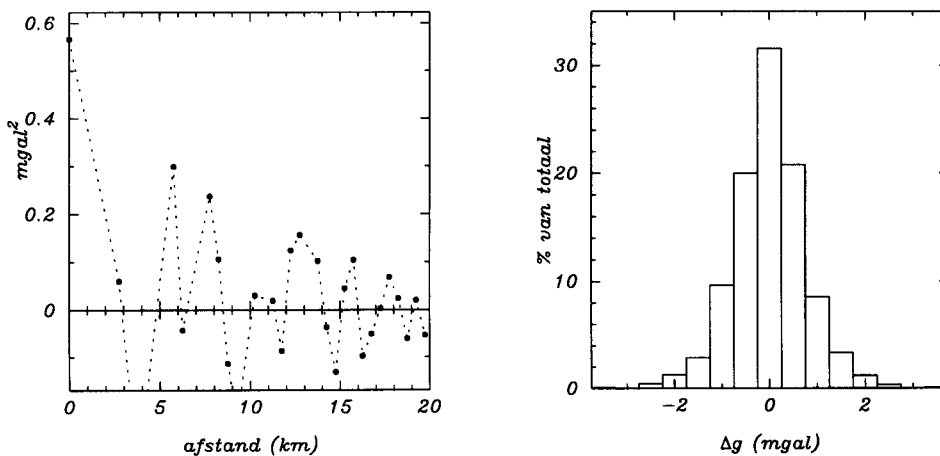
Op basis van de tweede testdataset met de puntwaarden in Nederland zijn voor het gebied van $51.5^\circ < \varphi < 52.5^\circ$ en $4.5^\circ < \lambda < 6.0^\circ$ gemiddelde blokwaarden berekend voor blokgebieden van $1.5' \times 2.5'$ (ongeveer $(2.8 \text{ km})^2$), $3' \times 5'$ ($(5.6 \text{ km})^2$) en $6' \times 10'$ ($(11 \text{ km})^2$). Op het eerste oog wordt verwacht dat de kleinere blokgebieden variaties zullen vertonen ten opzichte van de waarde van grotere blokken. Deze variaties zullen elkaar binnen een groter blokgebied min of meer elimineren. Als er zich een helling bevindt in het zwaartekrachtssignaal binnen een groot blokgebied, of enkele aansluitende blokgebieden, dan zullen in die richting de correlaties tussen twee aaneengelegene kleine blokjes een negatief teken hebben (zie figuur 4.7). Als er zich geen helling bevindt in een bepaalde richting, dan zullen eventuele verschillen met grotere blokwaarden hetzelfde teken hebben, en dus positief gecorreleerd zijn. In figuur 4.8 worden de empirische covariantiefunctie en het histogram van de verschillen tussen $1.5' \times 2.5'$ en $3' \times 5'$ gemiddelde blokwaarden gegeven. De covariantiefunctie laat zien dat de correlatie met het direct aanliggende buurblokje gemiddeld nul is. Dit komt doordat voor het grootste deel van het gebied een sterke, langgolvlige helling voorkomt. Dit veroorzaakt in de ene richting een sterke negatieve correlatie, en in de andere richting een sterke positieve correlatie, waardoor de gemiddelde correlatie over die korte afstand ongeveer nul wordt. Voor een afstand van 2 keer de grootte van de kleine blokjes blijkt een vrij sterke positieve correlatie aanwezig te zijn. Dat komt doordat in de richting van de helling weer een verschil met het grotere blokgebied ontstaat van hetzelfde teken, en in de richting waar geen helling is, ook nog steeds een positieve correlatie aanwezig is. De totale correlatie over die afstand is dus positief. Het verschil met de variantie geeft een indruk van het aanwezige hoogfrequente signaal, hier ongeveer $(0.5 \text{ mgal})^2$. Voor grotere afstanden



Figuur 4.7 Empirische covariantiefunctie van verschillen tussen kleine en grote blokgebieden, als in het signaal een helling voorkomt.

wordt de correlatie steeds minder groot, doordat de significante hellingen in het signaal zich uitstrekken over een gebied ter grootte van enkele blokgebieden.

Uit figuur 4.8 blijkt dat er eigenlijk geen hoge frequenties zijn met een golflengte kleiner dan het blokgebied, maar dat de verschillen worden veroorzaakt door langgolvlige (golflengte groter dan blokgebied) hellingen in het zwaartekrachtssignaal. De amplitude van de verschillen tussen kleinere en grotere blokgebieden bedraagt gemiddeld 0.7 mgal, terwijl maxima van ongeveer ± 3.5 mgal aanwezig zijn. Deze minima en maxima liggen



Figuur 4.8 Empirische covariantiefunctie en histogram van verschillen van $1.5' \times 2.5'$ blokwaarden en $3' \times 5'$ blokwaarden. Het steungebied is 0.06° . $n=1441$, gemiddelde = 0.000, rms = 0.752, min = -3.4, max = 3.7, stap = 0.5.

naast elkaar doordat in zo'n gebied een zeer grote helling aanwezig is in het zwaartekrachtssignaal. In hoofdstuk 6 zal worden bekeken hoe groot de effecten hiervan zijn voor de geoidhoogten.

In tabel 4.2 staat dat voor het geval van representatie gewichten, waarbij geen correlaties tussen de fouten in de blokwaarden aanwezig is, de varianties van blokken van 3'x5' en blokken van 6'x10' ongeveer 4 keer zo klein worden, als het blokgebied 4 keer zo groot wordt. Er geldt dan dat

$$\Delta\varphi \Delta\lambda \cos\varphi \sigma^2 \approx \text{constant} . \quad (4.23)$$

Het foutvolume is dus min of meer constant. Als een constant foutvolume wordt gebruikt, wordt dit ook wel foutconstante genoemd. Dit is de foutconstante die wordt geïntroduceerd door (Heiskanen&Moritz, 1967) en ook wordt gebruikt door (Strang van Hees, 1986). Het maakt daarbij niet uit of eerst kleine blokgebieden worden genomen en dan daaruit grotere worden berekend, of dat direct grotere worden berekend.

Dezelfde redenatie over de foutconstante geldt ook voor kleinste-kwadraten predictie als het de foutvarianties betreft, maar niet als het de foutvolumes betreft. Als er significante correlaties bestaan met buurblokken dan kunnen niet zo eenvoudig grote blokken worden berekend door kleine blokken samen te voegen, omdat voor de foutberekening de covarianties dan in rekening moeten worden gebracht. De foutconstante wordt veelvuldig gebruikt bij analyses van foutinvloeden. Met name bij spectrale berekeningen speelt hij een belangrijke rol. Het is echter van belang dat, als er correlaties bestaan tussen blokfouten, deze niet worden verwaarloosd. Voor de zeer dichte Nederlandse dataset is voor elke blok grootte een goede gemiddelde-waarde-berekening mogelijk met nabije puntwaarden. Daardoor ontstaan slechts zeer kleine covarianties.

Gebruikte covariantiefunctie

De covariantiefunctie die is gebruikt bij alle testberekeningen, en wordt beschreven door het analytische model (4.20), wordt nu ook gebruikt met een aangepaste parameter $d = 0.288^\circ = 32.0$ km. Met deze parameters past de functie goed bij de zwaartekrachtanomalieën na aftrek van OSU91A-anomalieën. Uit tabel 4.2 blijkt dat de fout(co)variantiewaarden groter worden. Het zwaartekrachtssignaal is minder gecorreleerd over een bepaalde afstand, dus kan minder goed een predictie worden uitgevoerd, en de precisie van de gemiddelde blokwaarden zal slechter worden. Opvallend is dat het percentage correlatie van de blokfouten niet kleiner wordt, terwijl de signaalcorrelatie wel kleiner wordt over een bepaalde afstand. Alle resultaten zoals die zijn weergegeven in de tabellen 4.3-4.6 zijn gedaan met de aangepaste covariantiefunctie. De gemiddelde waarden en rms-waarden van de varianties en foutvolumes worden gegeven in tabel 4.7. Ook hierin ziet men dat zowel de varianties als de foutvolumes groter zijn met $d = 0.288^\circ$ dan met $d = 0.588^\circ$.

De correlaties worden niet opnieuw in detail gegeven, omdat het correlatiegedrag er zeer vergelijkbaar uit ziet met de resultaten in de tabellen 4.3 tot 4.6. De gemiddelde waarden zijn gelijk aan het geval waarbij $d = 0.588^\circ$, terwijl de rms-waarden kleiner

Tabel 4.7 Resultaten van gemiddelde foutvariantie en foutvolume, voor twee verschillende covariantiefuncties (links is $d = 0.588^\circ$ en rechts is $d = 0.288^\circ$). De variantiewaarde is voor beide 60 mgal^2 . Alle waarden zijn in mgal .

methode	steungebied	$\frac{\sqrt{\sigma^2}}{\sqrt{\text{rms}_{\sigma^2}}}$		$\frac{\sqrt{\sigma_{\text{vol}}^2}}{\sqrt{\text{rms}_{\sigma_{\text{vol}}^2}}}$	
		$d = 0.588^\circ$	$d = 0.288^\circ$	$d = 0.588^\circ$	$d = 0.288^\circ$
rep.	blokgebied	0.275	0.465	0.322	0.563
		0.245	0.411	0.381	0.638
kk.	blokgebied	0.157	0.269	0.172	0.314
		0.137	0.233	0.152	0.277
kk.	0.06°	0.102	0.175	0.108	0.184
		0.065	0.113	0.068	0.117

zijn voor beide predictiemethoden met een blokgebied-steungebied, en gelijk voor een steungebied van 0.06° . Hier zien we wel dat de correlatie wat kleiner wordt.

Dataset gesplitst in 4 delen

Het zou een stuk goedkoper zijn geweest als het nieuwe Nederlandse zwaartekrachtnet uit slechts een kwart van de punten had bestaan. Om te bekijken of dit ook nog een voldoende goed geoideresultaat zou hebben opgeleverd kan de dataset worden gesplitst in 4 delen. Dit kan worden beschouwd alsof 4 keer een zwaartekrachtnet is gemeten. De resultaten zijn natuurlijk niet geheel onafhankelijk, maar het is desondanks interessant om te kijken naar de verschillen die het oplevert.

Het grootste deel van de testdataset in Nederland met puntwaarden is in 4 delen gesplitst, zodanig dat elk van de 4 datasets nog steeds een zo homogeen mogelijke dekking geven. In totaal zijn 6636 puntwaarden gegeven in het testgebied, welke zijn verdeeld over de vier subsets als 1683, 1666, 1651 en 1636. Voor elk van de vier subdatasets zijn gemiddelde blokwaarden voor $3 \times 5'$ gebieden bepaald met kleinste-kwadraten predictie en een 0.06° -steungebied. De verschillen van elk van de vier subdatasets met de resultaten van de totale dataset staan gegeven in tabel 4.8.

Wat opvalt in de correlatieberekening in vergelijking met de berekening met de volledige dataset is dat er meer correlatie is. Dit komt omdat punten in buurblokken nu belangrijker zijn voor de predictie. Er zijn te weinig punten in het blokgebied zelf om een goede predictie uit te voeren. De correlatie heeft vaak een negatief teken. Dit blijkt ook uit het feit dat het foutvolume gemiddeld kleiner is dan de foutvariantie, dit in te-

Tabel 4.8 *Verschillen van de vier subset-resultaten met de resultaten van de totale dataset, voor 3'x'5' gemiddelde blokwaarden. Kleinste-kwadraten predictie met een 0.06°-steungebied is toegepast. Alle waarden zijn in mgal.*

Dataset	aantal punten	gemiddelde	rms	minimum	maximum
I	1683	0.022	0.296	-2.164	1.516
II	1666	0.026	0.313	-1.857	1.805
III	1651	0.041	0.368	-2.113	4.722
IV	1636	0.005	0.352	-3.305	2.256

genstelling tot de resultaten met de volledige dataset. De foutvariantie is gemiddeld een factor 4 groter dan bij het gebruik van de de volledige dataset. Dit komt overeen met de gevonden verschillen in de gemiddelde blokwaarden zelf (zie tabellen 4.5 en 4.8). Het effect op de geoïde wordt in paragraaf 6.5 beschreven.

Conclusies

In dit hoofdstuk zijn gemiddelde blokwaarden en de predictiefoutvarianties en -covarianties berekend van gemiddelde blokwaarden met verschillende parameters. De belangrijkste conclusies die uit de resultaten van de tests volgen zijn:

- Als alleen het blokgebied als steungebied wordt gebruikt zijn er toch foutcovarianties tussen de verschillende blokwaarden.
- Het gebruik van een blokgebied-steungebied of een groter steungebied (met ongeveer 4 keer zoveel punten) geeft lokale verschillen in de gemiddelde waarden. Voor kleinste-kwadraten predictie blijkt dat bij het blokgebied-steungebied lokaal meer correlatie met buurblokfouten voorkomt dan bij een 0.06°-steungebied, uitgezonderd de directe buurblokken.
- Het gebruik van representatie gewichten of kleinste-kwadraten gewichten geeft verschillen in de gemiddelde waarden tot ruim een mgal. Het gemiddelde verschil is vrijwel nul. De foutvarianties zijn bij kleinste-kwadraten gewichten aanmerkelijk kleiner dan bij representatie gewichten. Ook de correlaties zijn een stuk minder, zodat de foutvolumes ook kleiner zijn.
- Voor grotere blokgebieden worden kleinere fout(co)varianties gevonden dan bij kleinere blokken. Uit de tests blijkt dat bij deze dichte testdataset inderdaad een soort foutconstante (constant foutvolume) wordt gevonden. De data hebben zo'n hoge dichtheid dat de gemiddelde blokwaarden goed kunnen worden bepaald en punten ver weg niet van belang zijn.
- Een covariantiefunctie met een grotere correlatielengte geeft kleinere foutvarianties voor de gemiddelde blokwaarden. De correlatie van de fouten verschilt niet veel voor verschillende correlatielengten. De variantiewaarden hangen direct samen met de gebruikte signaalvariantie $C(0)$. De fout(co)variantie is evenredig met de signaalvariantie die wordt gebruikt.

- Als minder punten beschikbaar zijn om dezelfde blokwaarden te bepalen kan dat minder goed. De standaardafwijkingen worden een factor 4 groter als er 4 keer zo weinig puntdata zijn. Bovendien ontstaat er meer correlatie, doordat de punten verder weg van belang zijn voor een goede gemiddelde-blokwaardebepaling. De verschillen tussen de volledige Nederlandse dataset en een dataset met slechts een kwart van de punten van deze dataset lopen op tot ruim boven een mgal.

Meetruis voortplanting

De ruis van de metingen geeft ook nog een bijdrage aan de fout(co)variantie van de gemiddelde blokwaarde, zie (4.17). Voor de Nederlandse dataset wordt de meetruis beschreven door (3.2). Er is zeer weinig correlatie, en een standaardafwijking van 0.3 mgal voor de losse punten. Bij een blokgebied-steungebied geeft dat een bijdrage van ongeveer $\sigma = \sqrt{\frac{1}{7}} \cdot 0.3 \approx 0.11$ mgal, en bij een 0.06° -steungebied van ongeveer $\sigma = \sqrt{\frac{1}{31}} \cdot 0.3 \approx 0.05$ mgal. Er komen namelijk gemiddeld respectievelijk 7 en 31 punten voor in de twee steungebieden. De gecorrleerde meetruis is zo klein dat het effect beneden het niveau van enkele honderdste mgal blijft. Het geïde-effect hiervan is van sub-mm niveau. Bij de foutvoortplanting van de binnengebieddata wordt de ruis direct toegevoegd, zoals aangegeven in (4.17).

4.5 Berekening van gemiddelde waarden in en rondom Nederland

Vooruitlopend op de resultaten van hoofdstuk 6, waar de geïde-effecten van de in dit hoofdstuk berekende verschillen worden berekend, wordt voor Nederland een dataset met 3'x5' gemiddelde blokwaarden bepaald. De toegepaste methode is kleinste-kwadraten predictie met een 0.06° -steungebied. In dit hoofdstuk is gebleken dat dit de kleinste foutvarianties oplevert met verwaarloosbare correlaties, zodat hiermee over het algemeen het kleinste foutvolume, en de kleinste geïde-variantie wordt bereikt.

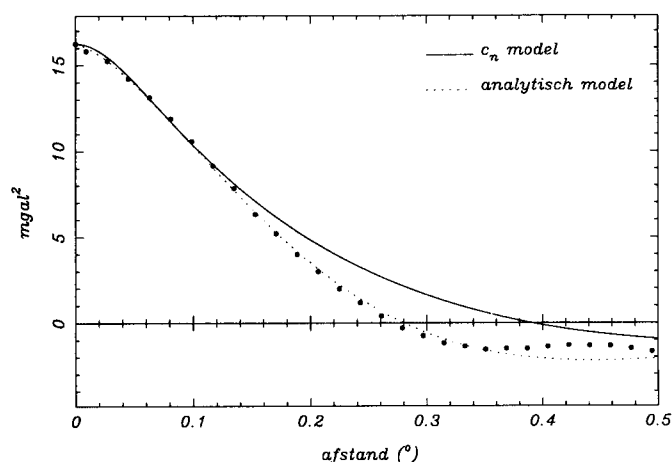
Bij de berekening van de gemiddelde waarden en de fout(co)varianties wordt gebruik gemaakt van de empirische covariantiefunctie van de residu zwaartekrachtanomalieën (met aftrek van de OSU91A-anomalieën, zie hoofdstuk 3). Dit wordt gedaan omdat voor elk blokgebied alleen maar de punten in de directe omgeving worden gebruikt, en de empirische covariantiefunctie van de residu anomalieën de signaalvariatie in kleine gebieden het beste weergeeft. In hoofdstuk 3 bleek dat de empirische covariantiefunctie van de residu zwaartekrachtanomalieën niet veel verschilt voor heel Nederland, of voor de drie gekozen deelgebieden, wat de vorm betreft. De variantiewaarden verschillen wel per gebied. De eerste zorg is om een covariantiefunctie te vinden die goed aansluit bij de gevonden vorm van de empirische covariantiefunctie. De variantie kan middels een eenvoudige schaling worden aangepast.

In paragraaf 2.4 is uitgelegd waarop men dient te letten bij het vinden van een zo goed mogelijk passende functie. Er zal hier op twee manieren een functie worden gezocht. De eerste manier is door middel van een graadvariantiemodel. De tweede is door middel

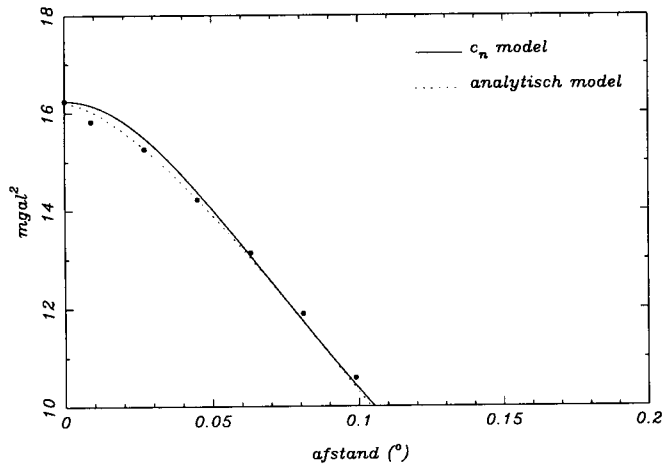
van een analytische functie. Zo'n functie is niet gemakkelijk te transformeren naar kruiscovariantiefuncties of autocovariantiefuncties van andere grootheden, zoals dat via een graadvariantiemodel wel mogelijk is. Voor de bepaling van gemiddelde zwaartekrachtanomalieblokwaarden is dat ook niet nodig. Omdat met zo'n analytische functie vaak wel een betere aanpassing bij de empirische covariantiefunctie wordt gehaald, kunnen daarmee realistischer waarden voor de fout(co)varianties van de gemiddelde blokken worden gevonden. Voor de gemiddelde blokwaarden zelf maakt het niet veel uit als de covariantiefunctie iets anders wordt gekozen. Het model uit de graadvarianties wordt bepaald omdat deze functie nodig is voor de collocatie-tests in hoofdstuk 6.

Figuur 4.9 en figuur 4.10 geven de waarden van de empirische covariantiefunctie en de twee modellen die er het beste bij passen. Figuur 4.11 geeft het graadvariantiespectrum dat tot de covariantiefunctie leidt. We zien dat de analytische functie inderdaad beter aansluit dan de covariantiefunctie uit het graadvariantiemodel. Zowel voor de korte afstanden $\psi < 0.05^\circ$ als de langere $\psi > 0.15^\circ$ wordt een betere aansluiting verkregen. De korte afstanden zijn belangrijk voor een realistische berekening van de standaardafwijking van de gemiddelde blokwaarden.

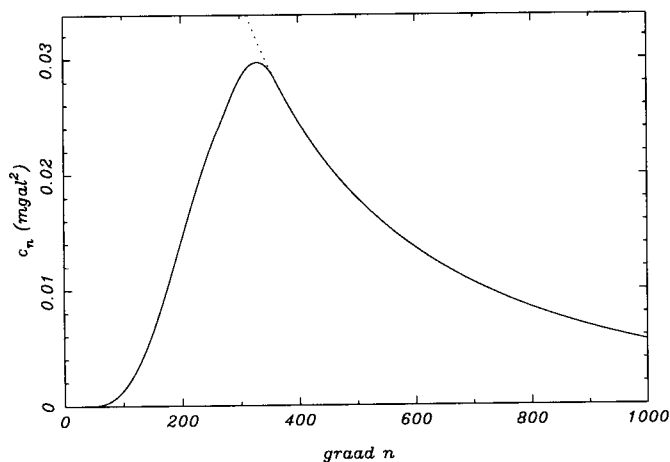
Met de analytische covariantiefunctie zijn gemiddelde blokwaarden voor 3'x5' gebieden binnen en direct buiten Nederland bepaald. Tevens zijn de fout(co)varianties bepaald. Deze 3'x5' gemiddelde waarden zijn samengevoegd met de gemiddelde blokwaarden voor de rest voor Europa, zoals is beschreven in hoofdstuk 3. We zullen hier nog een korte beschrijving geven van de bereikte varianties en covarianties voor Nederland en directe omgeving. De blokgebieden binnen Nederland, die zijn bepaald op basis van de nieuwe Nederlandse dataset, hebben gemiddeld een standaardafwijking van 0.15 mgal. De correlatie met buurblokken is zeer klein, zoals in de tests al bleek. Het aansluitende gebied in Duitsland heeft vergelijkbare precisions voor de blokwaarden. In België is de standaardafwijking groter, doordat de beschikbare data in de vorm van 6'x10' zijn, en



Figuur 4.9 Empirische covariantiefunctiewaarden van de residu zwaartekrachtanomalieën in Nederland (punten), en de best passende covariantiefuncties als analytische functie (stippellijn) en als graadvariantiecovariantiefunctie (dichte lijn).



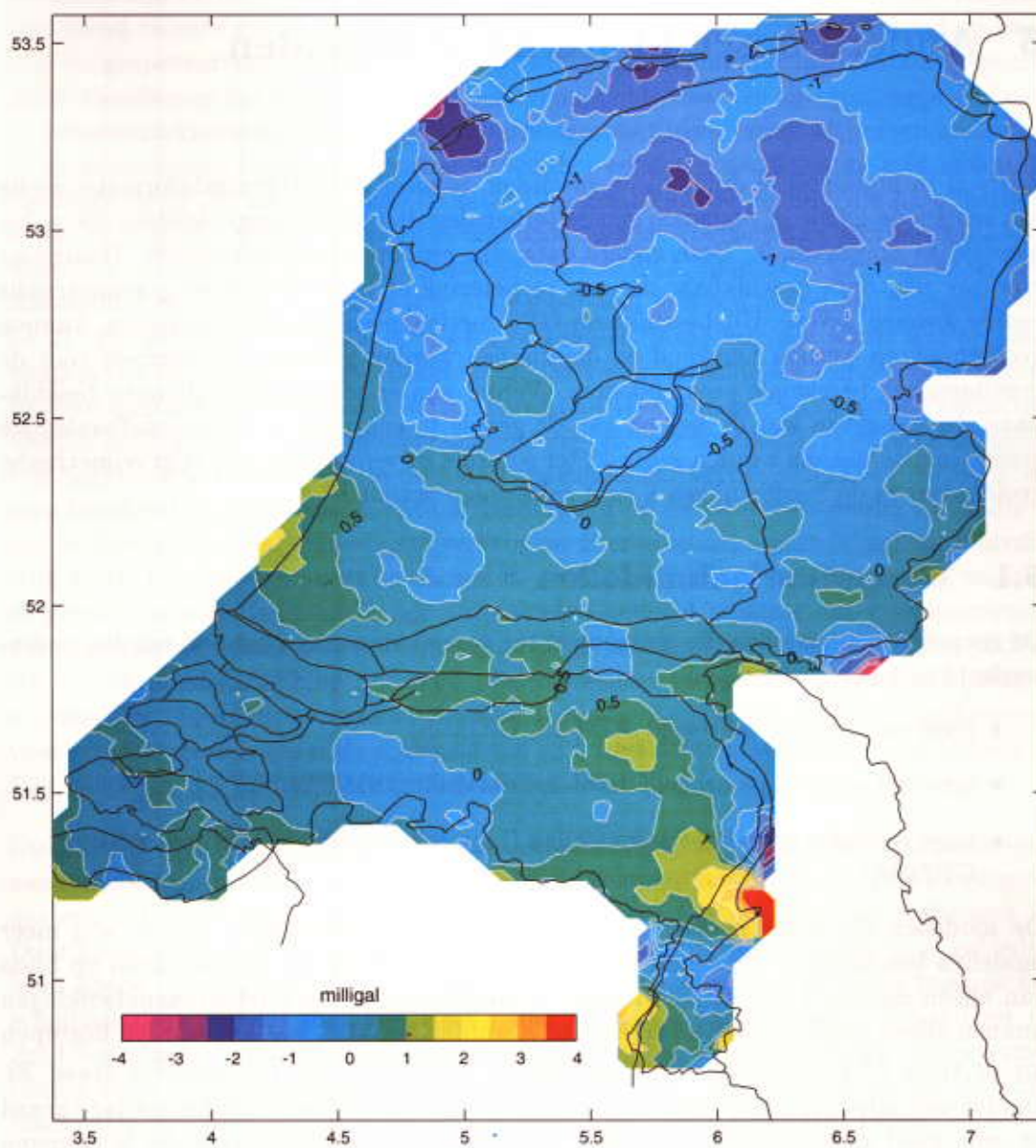
Figuur 4.10 Empirische covariantiefunctiewaarden van de residu zwaartekracht-anomalieën in Nederland (punten), en de best passende covariantiefuncties als analytische functie (stippellijn) en als graadvariantecovariantiefunctie (dichte lijn), ingezoomd voor kleine afstanden.



Figuur 4.11 De signaalgraadvarianties die leiden tot de covariantiefunctie in figuur 4.9.

niet zeer precies zijn. De standaardafwijking wordt beschreven met de gegeven formule (3.6). Voor de Noordzee wordt de standaardafwijking van de 3'x5' blokwaarden geschat op 1 mgal. Dit volgt ook uit de kruispuntanalyse van de vaarlijnen, zoals in hoofdstuk 3 is beschreven. Met deze varianties en covarianties zal in hoofdstuk 6 de geoidprecisie worden uitgerekend.

De verschillen tussen de nieuwe Nederlandse dataset en de oude dataset (uit de Atlas), welke zijn gebruikt bij de vorige geoidberekening voor Nederland (Van Willigen, 1985), zijn weergegeven in figuur 4.12. Van deze verschillen is een covariantiefunctie berekend. Deze ziet er hetzelfde uit als de covariantiefunctie in figuur 3.26, waarbij alleen de piek voor $\psi = 0$ grotendeels verdwijnt, omdat nu met gemiddelde waarden en niet met puntwaarden is gerekend.



Figuur 4.12 Verschillen tussen nieuwe en oude 3'x5' waarden in Nederland. Contourlijninterval is 0.5 mgal.