

Globale en lokale geodetische systemen

Globale en lokale geodetische systemen

Govert Strang van Hees

Oud-universitair hoofddocent aan de TU Delft

Delft, januari 2006

Publicatie 30, 4e herziene druk

NCG Nederlandse Commissie voor Geodesie Netherlands Geodetic Commission

Eerste druk: 1993
Tweede herziene druk: 1994
Derde herziene druk: 1997
Vierde herziene druk: 2006

Globale en lokale geodetische systemen
Govert Strang van Hees
NCG Groene serie 30, 4e herziene druk
ISBN 90 6132 294 4

Vormgeving en productie: Bureau Nederlandse Commissie voor Geodesie
Druk: Optima Grafische Communicatie, Rotterdam
Omslag: NLGEO2004, net 5e Nauwkeurigheidswaterpassing, GPS-kernet, AGRS.NL

NCG Nederlandse Commissie voor Geodesie
Kluyverweg 1, 2629 HS Delft
Postbus 5058, 2600 GB Delft
T: 015 278 28 19
F: 015 278 17 75
E: ncg@lr.tudelft.nl
W: www.ncg.knaw.nl

De Nederlandse Commissie voor Geodesie (NCG) is een onderdeel van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (KNAW).

Inhoudsopgave

1.	Inleiding	1
2.	Ellipsoidische systemen	4
3.	Ellipsoidische constanten	9
4.	De ligging van de ellipsoïde, datumtransformatie	11
5.	Kaartprojecties	17
6.	Stereografische projectie en RD-coördinaten	21
7.	Transformatie van RD-coördinaten naar geografische coördinaten	31
8.	Lambert-projectie in België	36
9.	Mercator-projectie	39
10.	Transversale Mercator-projectie en UTM	40
11.	Gauss-Krüger-projectie in Duitsland	47
12.	Transformatie van RD naar WGS84 en ETRS89	48
13.	Transformatie van RD naar ED50 (UTM) en vice versa	53
14.	Transformatie van Belgische coördinaten naar ED50 (UTM) en ETRS89	57
15.	Transformatie van ED50 naar ED87 voor de Noordzee	59
16.	Transformatie van ED87 naar WGS84	61
17.	WGS84 en ETRS89	62
18.	Astronomische breedte en lengte	64
19.	Hoogtesystemen	70
20.	Schema RD – NAP – geoïde – GPS	75
21.	Literatuur	77

1. Inleiding

Aan het eind van de 19e eeuw ontwikkelde elk land zijn eigen nationale geodetische coördinaatsysteem. Om de in dat land best passende ellipsoïde af te beelden op een plat vlak, werd een eigen projectiemethode aangenomen al of niet via een projectie op de bol. In Nederland gebruikt men de Bessel-ellipsoïde (1841), die eerst via de Gauss-projectie op de bol wordt afgebeeld. Deze bol wordt daarna door de stereografische projectie op een plat vlak afgebeeld. In dit platte vlak zijn de coördinaten van de Rijksdriehoeksmeting (RD) gedefinieerd.

In België gebruikt men bijvoorbeeld een heel ander systeem, namelijk de Hayford-ellipsoïde en de Lambert-projectie. In Duitsland gebruikt men de Bessel-ellipsoïde en de Gauss-Krüger-projectie, en zo heeft elk land zijn eigen systeem. Het zal duidelijk zijn dat langs de grenzen de omrekening van coördinaten van het ene naar het andere systeem grote moeilijkheden oplevert. Daarom heeft men in 1950 een Europees systeem geïntroduceerd (ED50), gebaseerd op de Internationale Ellipsoïde uit 1930 en de Universele Transversale Mercator-projectie (UTM-projectie). Door de inhomogeniteit van de nationale systemen had dit ED50 ook veel onnauwkeurigheden.

Door de komst van de satellieten na 1960 is de geodesie op een globaal niveau gekomen. Globaal wordt hier gebruikt in de betekenis van wereldwijd. De plaatsbepalingsmethoden zijn gebaseerd op metingen naar satellieten, zoals het Global Positioning System (GPS) en Satellite Laser Ranging (SLR). De coördinaatsystemen die hiervoor gebruikt worden, zijn globale systemen die zo goed mogelijk passen bij de aarde als geheel, zoals het World Geodetic System 1984 (WGS84). De gebruikte ellipsoïde wordt het Geodetisch Referentie Systeem (GRS) genoemd, voorzien van een jaartal dat aangeeft wanneer dit systeem internationaal is aangenomen, bijvoorbeeld GRS67 en GRS80.

De omrekening van coördinaten in het globale systeem naar het lokale systeem geeft soms moeilijkheden, omdat de systemen niet precies op elkaar passen vanwege de verschillende meetgegevens en vereffeningen die gebruikt zijn. De systemen worden omgerekend in elkaar via een transformatie, waarvan de parameters zijn berekend via een kleinste kwadratenvereffening. Meestal gelden deze parameters voor een bepaald gebied, omdat ze berekend zijn voor de optimale passing in dit gebied. De transformatieparameters van ED50 naar WGS84 zijn bijvoorbeeld verschillend voor Noorwegen en voor Nederland. Vooral voor de offshore industrie op de Noordzee is dit een probleem, daar alle omliggende landen eigen lokale systemen hebben en de transformaties voor die landen verschillend zijn.

In dit boekje zal een overzicht gegeven worden van verschillende coördinaatsystemen, die in de geodesie gebruikt worden en speciaal in Nederland. De aandacht zal gevestigd worden op de transformaties van het ene systeem naar het andere. Zowel driedimensionale ellipsoïdische systemen als tweedimensionale kaartprojecties worden behandeld. Het is niet de bedoeling theoretische afleidingen te geven. Dit boekje is vooral gericht op de mensen uit de praktijk en geeft een overzicht van de gebruiksformules.

Ondergetekende heeft veel steun gehad van de stimulerende discussies met prof.dr. R. Rummel en ir. G. Bakker. Beiden hebben het boekje zorgvuldig nagelezen en verbeteringen in de tekst en sommige formules aangebracht. Verder dank ik ir. T.G. Schut van de Rijksdriehoeksmeting voor de voorgestelde correcties en aanvullingen. Student Andrea Wittich heeft het boekje zeer zorgvuldig bestudeerd en alle voorbeelden gecontroleerd. Zij heeft veel waardevolle verbeteringen voorgesteld. Verder zijn verbeteringen voorgesteld door diverse andere personen, die ik hierbij bedank. Tenslotte dank ik mevr. W. Coops en mevr. R. Lips voor het zorgvuldige typewerk, de heer M.G.G.J. Jutte voor de tekeningen en de heer F.H. Schröder voor het correctiewerk en de opmaak van het boekje.

Voorwoord bij de 2e druk

Het boekje is enigszins uitgebreid met hier en daar wat meer theoretische achtergrond en verduidelijkingen, zodat het ook als leerboek kan dienen. Er is een nieuwe paragraaf toegevoegd over de astronomische lengte en breedte en schietloodafwijkingen. De heer F.H. Schreutelkamp (amateur-astronoom) zond mij een beschrijving van de geschiedenis van het Nederlandse basispunt die hier met dank wordt overgenomen.

Voorwoord bij de 3e druk

Ook bij de derde druk zijn een aantal verbeteringen aangebracht. Met name is er een nieuwe geöïde berekend en daardoor is de transformatie van WGS84 naar RD verbeterd. De formules van de UTM-projectie zijn aangepast aan WGS84. Verder zijn de astronomische coördinaten van meer punten gegeven in tabel 15. Ook is een paragraaf toegevoegd over astronomische coördinaten en de berekening van hoogte en azimut van zon, maan en sterren.

Voorwoord bij de 4e druk

Dat er bijna tien jaar na de derde druk nog behoefte bestaat aan een nieuwe herziene druk geeft aan dat dit boekje voorziet in een behoefte van de praktijk. Vergeleken met de derde druk zijn een aantal kleinere veranderingen aangebracht, speciaal de rol van WGS84, ETRS89 en de transformatie 'RDNAPTRANS' zijn toegelicht.

Ir. G.L. Strang van Hees

2. Ellipsoïdische systemen

De aarde is bij benadering een bol, die aan de polen is afgeplat. Daarom wordt de aarde in eerste instantie benaderd door een omwentelingsellipsoïde, die afgeplat is aan de polen. De vorm en grootte van de ellipsoïde wordt vastgelegd door twee grootheden:

de lange as of equator-as: a

de korte as of pool-as: b

In plaats van b kan men ook de afplatting f (flattening) vastleggen:

$$f = \frac{a - b}{a} \quad (1)$$

of de excentriciteit e :

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 2f - f^2 \quad (2)$$

Uitgaande van deze basisgrootheden kan men vele andere grootheden afleiden. Belangrijk zijn vooral de kromtestralen van de ellipsoïde. Zoals bekend heeft een bol één kromtestraal R , omdat de kromming van het oppervlak overal gelijk is. De ellipsoïde heeft echter geen vaste kromtestraal. In de eerste plaats verandert de kromming afhankelijk van de breedte φ van de equator tot de pool. Maar daarnaast is de kromming verschillend in noord-zuid richting en in oost-west richting.

De kromtestraal in noord-zuid richting wordt M genoemd en is:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad (3)$$

In oost-west richting is de kromtestraal N :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (4)$$

Vaak wordt de wortelvorm met W aangeduid:

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \quad (5)$$

dus:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{W^3} \quad \text{en} \quad N = \frac{a}{W}$$

De plaats van een punt in de ruimte wordt in ellipsoidische coördinaten aangeduid met:

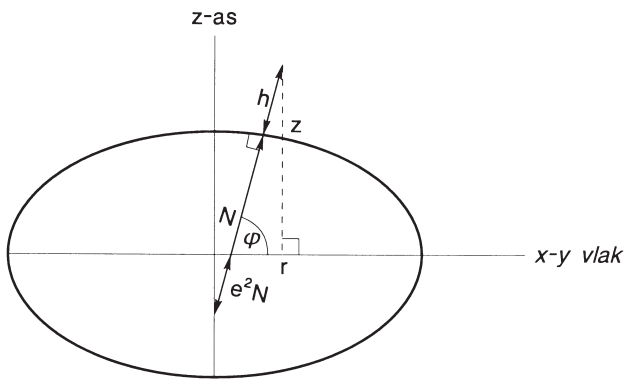
breedte φ , lengte λ , hoogte h .

φ is de hoek die de loodlijn op de ellipsoïde maakt met het equatorvlak,

λ is de hoek in oost-west richting met de Greenwich meridiaan,

h is de hoogte boven de ellipsoïde,

N is de afstand langs de loodlijn van de ellipsoïde tot de verticale as. Dit is dezelfde N als de hiervoor genoemde kromtestraal in oost-west richting.



Figuur 1.

De omrekening van (φ, λ, h) naar rechthoekige coördinaten (x, y, z) gaat volgens de formules:

$$\begin{aligned} x &= (N + h) \cos\varphi \cos\lambda \\ y &= (N + h) \cos\varphi \sin\lambda \\ z &= (N - e^2 N + h) \sin\varphi \end{aligned} \quad (6)$$

De terugrekening van (φ, λ, h) uit (x, y, z) is als volgt, met: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\begin{aligned} \tan\varphi &= \frac{1}{r} (z + e^2 N \sin\varphi) \quad (4 \text{ x iteratie, eerste benadering: } N \sin\varphi = z) \\ \tan\lambda &= \frac{y}{x} \\ h &= r \cos\varphi + z \sin\varphi - a\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi} \end{aligned} \quad (7)$$

In vergelijking met andere formules voor h heeft deze formule het voordeel dat een afrondingsfout in φ geen invloed heeft op de berekende hoogte (Bowring, 1985).

In de eerste formule van (7) wordt φ berekend via iteratie, d.w.z. men berekent in het rechter lid $N\sin\varphi$ met een benaderde waarde van φ , die men in de volgende stap kan verbeteren. Dit kan men programmeren in een lus, die men 3 of 4 maal moet doorlopen. Men kan ook de gewenste precisie van φ opgeven en de lus laten doorlopen totdat de verandering van φ kleiner is dan de precisie.

In plaats van de iteratieve methode bestaat er ook een directe methode om φ te berekenen. Dit is de methode van Bowring. Deze is heel goed geschikt voor een rekenprogramma.

$$\tan\varphi = \frac{z + e'^2 b \sin^3\mu}{r - e'^2 a \cos^3\mu} = \frac{z + e'^2 a \sin^3\mu(1-f)}{r - e'^2 a \cos^3\mu} \quad (7a)$$

met

$$\begin{aligned} \tan\mu &= \frac{za}{rb} = \frac{z}{r(1-f)} \\ r^2 &= x^2 + y^2 \\ e'^2 &= \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{e^2}{1 - e^2} = \frac{2f - f^2}{(1 - f)^2} \end{aligned} \quad (7b)$$

De afleiding van de formule is heel vernuftig en staat beschreven in: B.R. Bowring, Survey Review juli 1976, en is ook beschreven in NGT Geodesia 1993-7 door G.L. Strang van Hees.

Massa en rotatie

De voorgaande formules hebben alle betrekking op de geometrische vorm van de ellipsoïde. Voor fysische toepassingen binnen de geodesie is het belangrijk de ellipsoïde ook te kunnen beschouwen als een fysisch lichaam, dus met een massa en een rotatiesnelheid. Daarom wordt aan de ellipsoïde ook een massa en rotatiesnelheid toegekend, die gelijk zijn aan de massa en rotatie van de werkelijke aarde. De rotatiesnelheid ω is goed te bepalen uit astronomische metingen of metingen naar satellieten. De massa M wordt bepaald uit zwaartekrachtmetingen of uit de omlooptijd van satellieten. Volgens beide methoden bepaalt men echter niet de massa M zelf, maar de combinatie GM waarbij G de constante van Newton is volgens de wet van Newton van de aantrekkingskracht tussen twee massa's:

$$F = \frac{G M_1 M_2}{r^2}$$

Dit heeft tot gevolg, dat de combinatie GM bekend is met een precisie van 9 cijfers, terwijl G en M afzonderlijk slechts met 4 cijfers bekend zijn.

Als GM en ω van de ellipsoïde zijn vastgelegd, kan men ook het zwaartekrachtsveld van de ellipsoïde berekenen. Deze zwaartekracht wordt de *normaal zwaartekracht* genoemd (aangeduid met γ). Deze is een functie van de breedte φ en hoogte h volgens de formule:

$$\gamma = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{d\gamma}{dh} \cdot h$$

met:

$$k = \frac{b\gamma_p}{a\gamma_e} - 1 = 0,001\,931\,851\,386$$

Bovenstaande formule kan ook als reeksontwikkeling worden geschreven:

$$\gamma = \gamma_e + (\gamma_p - \gamma_e) \sin^2 \varphi - 5,736 \cdot 10^{-5} \sin^2 2\varphi + \frac{d\gamma}{dh} \cdot h \quad (8)$$

De constanten die hierin voorkomen zijn:

$$\gamma_e = \gamma \text{ aan de equator (in } m \cdot s^{-2}\text{)}$$

$$\gamma_p = \gamma \text{ aan de pool,}$$

$$\frac{d\gamma}{dh} = \text{verticale gradiënt van } \gamma. \text{ Deze is negatief, want } \gamma \text{ neemt af met de hoogte.}$$

Ze kunnen bepaald worden als de ellipsoïde is vastgelegd door de vier hiervoor genoemde constanten:

a , f , GM en ω , die zijn gegeven in hoofdstuk 3.

De normaal zwaartekracht blijkt in grote mate overeen te komen met de zwaartekracht van de werkelijke aarde (g). De verschillen ($g - \gamma$) worden de *anomalieën* Δg genoemd. Deze zijn in de orde van 10^{-5} deel van g ($g \approx 9,81 \text{ ms}^{-2}$). De huidige meetprecisie van g ligt in de buurt van 10^{-9} deel van g , dus de anomalieën zijn goed meetbaar en kunnen aanwijzing geven over geologische formaties in de ondergrond. De eenheid waarin de zwaartekrachtanomalieën worden uitgedrukt is milligal (naar Galilei). $1 \text{ mgal} = 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$, dus $g \approx 981\,000 \text{ mgal}$.

Het gebruik van de zwaartekracht binnen de geodesie is belangrijk om de *geoïde* te kunnen bepalen. De *geoïde* komt op een onbekende constante na overeen met het NAP-vlak. Bij hoogtebepaling met satellietmethoden, zoals GPS, is het noodzakelijk de vorm van de *geoïde* te kennen. Vandaar dat momenteel ook in Nederland veel zwaartekrachtmetingen worden uitgevoerd.

Door de Association Internationale de Géodésie (AIG) wordt op bepaalde tijdstippen de waarden van de constanten a , f , GM en ω vastgesteld voor de best passende ellipsoïde. Dit noemt men dan het Geodetic Reference System (GRS) met een jaartal er achter. Zo kennen we het GRS30, GRS67 en GRS80. Daarnaast wordt voor het praktisch gebruik ook nog de ligging van de ellipsoïde vastgelegd ten opzichte van vaste punten op aarde of ten opzichte van andere systemen die gebruikt worden. Bijvoorbeeld het Nederlandse RD-systeem, het Europese systeem (ED50 en ED87) en de wereldsystemen die World Geodetic System (WGS) genoemd worden (WGS72, WGS84). Zie hierover hoofdstuk 4.

3. Ellipsoïdische constanten

In de loop der jaren zijn veel ellipsoïden berekend. Voor 1960 verschilden de getalwaarden van de verschillende oplossingen van de best passende ellipsoïde vrij aanzienlijk. Na 1960 kwamen de satellietmethoden en sindsdien is de precisie van a , f en GM aanzienlijk toegenomen. De rotatieparameter ω was reeds langer goed bekend. De recente waarde is:

$$\omega = 7,292\ 115\ 146\ 7064 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1} = \frac{2\pi}{24 \text{ uur}} \left(1 + \frac{1 - p}{s} \right)$$

$s = 365,242\ 1988$, aantal dagen per jaar,

$p = 0,000\ 035\ 56$, invloed van de precessie van de aarde.

Ellipsoïde Naam	Lange as a (m)	Afplating $1 / f$	Massa GM (m^3s^{-2})
Airy (1830)	6377 563,396	299,324 964	
Bessel (1841)	6377 397,155	299,152 8128	
Clarke (1866)	6378 206,4	294,978 698	
Clarke (1880) (modified)	6378 249,145	293,4663	
Clarke (1880)	6378 249,145	293,465	
Everest (1830)	6377 276,345	300,8017	
Hayford (1909)	6378 388	297,00	
International (1930)	6378 388	297,00	$3,986\ 329 \cdot 10^{14}$
Krassovski (1940)	6378 245	298,3	
GRS67	6378 160	298,247 167 427	$3,986\ 030 \cdot 10^{14}$
IAG (1975)	6378 140	298,257 222	$3,986\ 005 \cdot 10^{14}$
GRS80	6378 137	298,257 222 101	$3,986\ 005 \cdot 10^{14}$
WGS84	6378 137	298,257 223 563	$3,986\ 005 \cdot 10^{14}$

Tabel 1.

De getalwaarden van de ellipsoïde van het WGS84-systeem, dat gebruikt wordt om het GPS-systeem te berekenen, zijn:

a	=	6378137,00 m
b	=	6356 752,31 m
f	=	0,003 352 810 665
$1 : f$	=	298,257 223 563
e^2	=	0,006 694 380 00
GM	=	$3,986\ 005 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
M	=	$5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
G	=	$6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
ω	=	$7,292\ 115\ 1467 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$
m	=	$0,003\ 449\ 786\ 003 = \omega^2 a^2 b / GM$
C_2	=	$-484,166\ 85 \cdot 10^{-6}$
J_2	=	$1082,6300 \cdot 10^{-6}$
γ_e	=	$9,780\ 326\ 7715 \text{ ms}^{-2}$
γ_p	=	$9,832\ 186\ 3685 \text{ ms}^{-2}$
$\gamma_p - \gamma_e$	=	$0,051\ 859\ 5970 \text{ ms}^{-2}$
$\frac{d\gamma}{dh}$	=	$-0,000\ 003\ 086 \text{ s}^{-2}$
k	=	0,001 931 851 386

Tabel 2. WGS84

Het GRS80 is beschreven door prof. H. Moritz in Bulletin Géodésique, Le Manuel du Géodésien 1980, 1992 en het WGS84 is beschreven in een rapport van de Amerikaanse Defence Mapping Agency, 1987.

De recente waarden voor de maten van de ellipsoïde zijn gegeven door de 'International Earth Rotation Service' in 1996:

a	=	6378 136,49 m
b	=	6356 751,75
f	=	1 : 298,256 45
J_2	=	$1082,6359 \cdot 10^{-6}$
GM	=	$3,986\ 004\ 418 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
ω	=	$7,292\ 115\ 146\ 7064 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Hieruit kunnen de andere grootheden berekend worden (zie: Heiskanen en Moritz, *Physical Geodesy*, 1967).

4. De ligging van de ellipsoïde, datumtransformatie

Als we de vorm, massa en rotatie van de ellipsoïde hebben vastgelegd, dan blijft nog over om de ligging ten opzichte van de werkelijke aarde vast te leggen. Meestal gebeurt dit door voor een vast punt op aarde (datum-point) de ellipsoïdische coördinaten vast te stellen. De richting van de rotatie-as van de ellipsoïde wordt zo goed mogelijk evenwijdig aan de rotatie-as van de aarde gekozen door het azimut van een zijde van het driehoeksnet vast te leggen. Op deze manier is het Nederlandse RD-net in het begin van deze eeuw berekend. Bovendien werd een ellipsoïde gekozen, die zo goed mogelijk aansluit bij Nederland, de Bessel-ellipsoïde. Deze ellipsoïde gaat echter steeds meer afwijken van de werkelijke aarde als we buiten Nederland komen. Hij is dus niet geschikt voor wereldwijde toepassingen.

Tegenwoordig wordt de ellipsoïde vastgelegd via de coördinaten van punten, die met satellietmethoden zijn bepaald. De satellietposities worden berekend ten opzichte van het massacentrum van de aarde en de daaruit volgende posities van de aardse meetpunten zijn dan ook coördinaten ten opzichte van het massacentrum. Internationaal is een ellipsoïdisch systeem gekozen, dat zo goed mogelijk bij de gehele aarde past, het World Geodetic System 1984 (WGS84). De gegevens staan in tabel 2.

Om coördinaten om te rekenen van het ene naar het andere systeem moet men de zogenaamde *datumtransformatie* (datumshift) toepassen. Een beter Nederlands woord is: *referentietransformatie*. 'Datum' wil in het Engels zeggen: de vastlegging van het basispunt en de ligging en maten van de referentie-ellipsoïde. Een datumtransformatie wil zeggen, dat het coördinatenstelsel verschoven wordt evenwijdig aan zichzelf (translatie T), gedraaid wordt om de drie assen (rotatie R) en een schaalverandering krijgt. Als (x, y, z) de coördinaten van een punt in het ene stelsel zijn en (x', y', z') de coördinaten in het andere, dan luidt de transformatie formule in matrixvorm:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta & +\gamma & -\beta \\ -\gamma & \delta & +\alpha \\ +\beta & -\alpha & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (9)$$

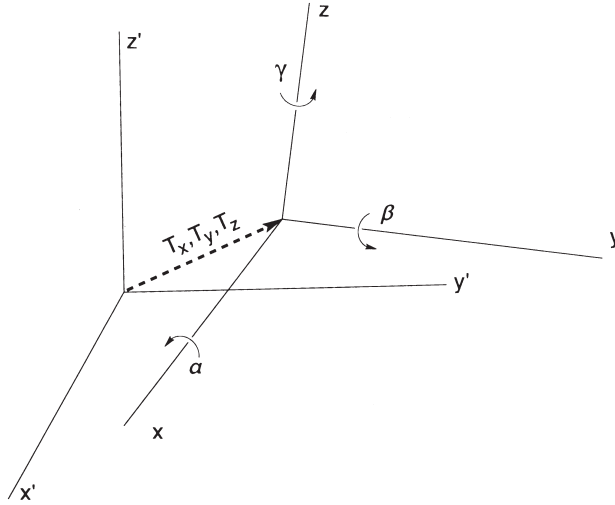
of in vectoren:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{T} + \mathbf{R}\mathbf{x} \quad (9a)$$

T is de translatievector van de oorsprong van het stelsel,
 R is de rotatiematrix,

α, β, γ zijn drie kleine rotaties om de x -, y -, z -as,
 δ is de schaalverandering, de schaal van het x' -stelsel is $(1 + \delta)$ maal de schaal van het x -stelsel.

In vergelijking met de 1e en 2e druk van dit boekje zijn de tekens van α, β en γ veranderd.



Figuur 2.

In formule (9) is T de translatie van het middelpunt van de ellipsoïde en R een rotatie om dit middelpunt. Het gevolg is dat kleine veranderingen in de rotatie, de coördinaten van punten op aarde over grote afstand doet verschuiven. Daarom is het voor de praktijk beter om de rotatie uit te voeren om een willekeurig punt x_0 (x_0, y_0, z_0), dat midden in het geodetische net ligt. Daardoor wordt de translatievector T_0 ook de translatie van het punt x_0 , in plaats van de translatie van het middelpunt van de ellipsoïde. We krijgen dan:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{x_0} \\ T_{y_0} \\ T_{z_0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta & +\gamma & -\beta \\ -\gamma & \delta & +\alpha \\ +\beta & -\alpha & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

of in vectoren:

$$x' = x + T_0 + R(x - x_0) \quad (10a)$$

Uit vergelijking tussen (9) en (10) volgt:

$$\begin{pmatrix} T_{x_0} \\ T_{y_0} \\ T_{z_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta & +\gamma & -\beta \\ -\gamma & \delta & +\alpha \\ +\beta & -\alpha & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Het voordeel van (10) boven (9) is, dat de term $\mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ veel kleiner is dan $\mathbf{R}\mathbf{x}$, omdat $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ kleiner is dan \mathbf{x} . Daardoor is de translatievector \mathbf{T}_0 niet gevoelig voor kleine veranderingen van \mathbf{R} in tegenstelling tot \mathbf{T} . Bijvoorbeeld een kleine verandering in afronding van het zevende cijfer van α , β of γ zal bij gebruik van (9) de coördinaten met één meter doen veranderen, maar bij gebruik van (10) is dit slechts in de orde van één cm. Als men alleen geïnteresseerd is in een precisie van enkele decimeters tot een meter, zoals bij de offshore industrie, dan kan men in (10) de rotatie term verwaarlozen. \mathbf{T}_0 is dan de translatie voor een punt in het midden van het gebied.

Berekening van de translatie- en rotatieparameters

De formules (9) of (10) hebben 7 onbekenden, die bepaald moeten worden: (T_x , T_y , T_z) en (α , β , γ , δ). Het is mogelijk door kleinste kwadratenvereffening dit op te lossen, indien we een aantal punten in coördinaten kennen in beide stelsels. De formules (10) kunnen nu als volgt worden geschreven voor elk gegeven punt:

$$\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -dz & +dy & dx \\ 0 & 1 & 0 & +dz & 0 & -dx & dy \\ 0 & 0 & 1 & -dy & +dx & 0 & dz \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{x_0} \\ T_{y_0} \\ T_{z_0} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \quad (12)$$

met: $dx = x - x_0$ $dy = y - y_0$ $dz = z - z_0$

De gemeten coördinaten ($x' - x$) staan in het linkerlid. De onbekenden, die opgelost moeten worden, staan rechts en de grote matrix is de A-matrix in een vereffeningsvraagstuk.

We kunnen dus schrijven met $\begin{pmatrix} T \\ R \end{pmatrix}$ de translatie-rotatievector in (12):

$$x' - x = \mathbf{A} \begin{pmatrix} T \\ R \end{pmatrix}$$

De vereffening gaat volgens de standaardmethode van kleinste kwadraten. We nemen aan dat de punten allemaal even nauwkeurig zijn, dus de variantiematrix is de eenheidsmatrix. De oplossing is:

$$\begin{pmatrix} T \\ R \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^* (x' - x) \quad (13)$$

\mathbf{A}^* is de getransponeerde matrix en n is het aantal punten.

$$(A^* A) = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & -\sum dz & +\sum dy & +\sum dx \\ 0 & n & 0 & +\sum dz & 0 & -\sum dx & +\sum dy \\ 0 & 0 & n & -\sum dy & +\sum dx & 0 & +\sum dz \\ 0 & +\sum dz & -\sum dy & +\sum dy^2 + dz^2 & -\sum dx dy & -\sum dx dz & 0 \\ -\sum dz & 0 & +\sum dx & -\sum dx dy & +\sum dx^2 + dz^2 & -\sum dy dz & 0 \\ +\sum dy & -\sum dx & 0 & -\sum dx dz & -\sum dy dz & +\sum dx^2 + dy^2 & 0 \\ +\sum dx & +\sum dy & +\sum dz & 0 & 0 & 0 & +\sum dx^2 + dy^2 + dz^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

en

$$A^* (x' - x) = \begin{pmatrix} \sum (x' - x) \\ \sum (y' - y) \\ \sum (z' - z) \\ \sum (y' - y) dz - \sum (z' - z) dy \\ \sum (z' - z) dx - \sum (x' - x) dz \\ \sum (x' - x) dy - \sum (y' - y) dx \\ \sum (x' - x) dx + \sum (y' - y) dy + \sum (z' - z) dz \end{pmatrix} \quad (15)$$

De inversie van de 7×7 matrix (14) maal de vector (15) geeft de translatie-, rotatie- en schaalparameters. Om de inversie van $(A^* A)$ beter geconditioneerd te maken, kunnen dx , dy en dz uitgedrukt worden in eenheden van 100 km, dus de getallen 10^5 maal zo klein maken. Dit betekent dat de uitkomst voor α , β , γ , δ 10^5 maal zo groot wordt. Achteraf moet men ze dus nog delen door 10^5 om de juiste waarden te krijgen.

De berekende waarden voor α , β , γ , δ zijn onafhankelijk van de ingevoerde x_0 , y_0 , z_0 . De translatievector T is wel afhankelijk van x_0 , y_0 , z_0 .

We kunnen ook de precisie van de berekende translatie- en rotatieparameters schatten. Bereken eerst de correctie e volgens:

$$e = A \begin{pmatrix} T \\ R \end{pmatrix} - (x' - x)$$

en vervolgens de schatting van de standaardafwijking s :

$$s = \sqrt{\frac{\sum e^2}{3n - 7}}$$

Er zijn n gegeven punten, dus $3n$ coördinaten en 7 onbekenden T en R , dus $(3n - 7)$ overaligheden.

De variantiematrix van de berekende T en R is:

$$Q = s^2 \cdot (A^* A)^{-1}$$

en de standaardafwijkingen van T en R zijn de wortels van de overeenkomstige diagonaalelementen van Q .

Ook kunnen we toetsen of een of meerdere van de gegeven punten een te grote afwijking heeft. De toetsgrootheid voor elke coördinaat is:

$$w_i = \frac{e_i}{s \cdot \sqrt{(\text{diagonaalelement van } E)}}$$

met: $E = I - A(A^*A)^{-1}A^*$
 I is de eenheidsmatrix.

Als $|w_i| > 2$ is, dan is de kans dat de betreffende coördinaat fout is, 95%.

Berekening van een datumtransformatie

Indien gegeven zijn de breedte, lengte en hoogte (φ, λ, h) van een punt in het eerste systeem en men de coördinaten in een ander systeem wil omrekenen, dan gaat men als volgt te werk:

1. $(\varphi, \lambda, h) \rightarrow (x, y, z)$ met (6)
2. $(x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$ met (10)
3. $(x', y', z') \rightarrow (\varphi', \lambda', h')$ met (7).

In tabel 3 staan de translatieparameters aangegeven van enige systemen naar WGS84. De translaties zijn verschuivingen van het middelpunt van de ellipsoïde van het aangegeven systeem naar WGS84, dus bijvoorbeeld:

$$T\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{WGS84}} - \mathbf{x}_{\text{Nederland}}$$

De rotaties en schaalcorrectie zijn hierbij nul aangenomen.

De precisie van de translatievectoren hangt af van het gebied waar men zit. Vooral voor grote gebieden zoals de Europese systemen ED50 en ED87 hangt de translatie af van de plaats, en is dus iets verschillend voor Duitsland, Nederland of Scandinavië. De aangegeven waarden zijn gemiddelden voor heel Europa. Bron: o.a. WGS84, Technical Report Defence Mapping Agency 1987.

Systeem	α (meter)	$e^2 \cdot 10^9$	WGS84 – ander systeem (meter)		
			T_x	T_y	T_z
Nederland Bessel	6377 397,155	6674 372	+ 593	+ 26	+ 478
België Hayford	6378 388	6722 670	-126	+ 80	-100
Engeland OSGB	6377 563,396	6670 540	+ 375	-111	+ 431
Duitsland Bessel	6377 397,155	6674 372	+ 583	+ 68	+ 399
WGS72	6378 135	6694 318	0	+ 8	+ 10
NSWL	6378 135	6694 318	-1	+ 15	+ 1
ED50	6378 388	6722 670	-86	-96	-118
ED87	6378 388	6722 670	-83	-96	-113
WGS84	6378 137	6694 380	0	0	0

Tabel 3.

OSGB is Ordnance Survey Great Britain (Airy-ellipsoïde)

NSWL is Naval Surface Weapon Laboratories (USA)

5. Kaartprojecties

Inleiding

De aarde is bij benadering een bol en deze kan nooit zonder vervorming op een plat vlak worden afgebeeld. Daarom zijn er veel verschillende projecties ontwikkeld om de bol in kaart te brengen, elk met bepaalde voor- en nadelen wat betreft de vervorming. Voor de geodesie spelen de kaartprojecties echter een andere rol dan voor de cartografie. Bij de cartografie gaat het om het maken van een kaart, dus is beperkte nauwkeurigheid voldoende, terwijl het in de geodesie gaat om het berekenen van geodetische coördinaten tot op millimeters nauwkeurig. Men kan zeggen, dat het in de cartografie gaat om tekenen en in de geodesie om rekenen. Het woord kaartprojectie is misleidend in de geodesie, omdat het niet gaat om een kaart en het meestal ook geen meetkundige projectie is, maar een wiskundige transformatie. Men kan dus beter spreken over coördinatentransformatie in plaats van kaartprojectie. Bovendien is het in de geodesie niet voldoende om de aarde als een bol te benaderen, maar moet men uitgaan van de ellipsoïde. Ook de invloed van de geoïde moet in rekening gebracht worden, speciaal voor de hoogtes. De verschillen tussen cartografie en geodesie komen tot uiting in tabel 4.

In het vervolg zullen we alleen over het geodetisch gebruik van projecties spreken. Waarom gebruiken de geodeten een projectie? Inderdaad kan men met ruimtelijke rekenmethoden driehoeksnetten berekenen. In de moderne satellietgeodesie, waarbij het gaat om netten die een groot deel van de aarde omspannen, rekent men inderdaad ruimtelijk. Voor kleine landen zoals Nederland is het echter een groot rekenkundig voordeel om in het platte vlak te kunnen rekenen. De punten op de bolvormige aarde worden geprojecteerd naar het platte vlak. Ook de metingen van afstanden en hoeken worden gecorrigeerd voor de projectie, zodat men waarden krijgt alsof ze in het platte vlak gemeten zouden zijn. Daarna kan men eenvoudig in het platte vlak het driehoeksnetsnet uitrekenen. De RD-coördinaten bijvoorbeeld zijn platte vlak coördinaten in de zogenaamde stereografische projectie. Als men uit RD-coördinaten een afstand uitrekt, moet men niet vergeten deze platte vlak afstand weer terug te transformeren naar de bol of ellipsoïde om de werkelijke afstand te krijgen.

Conforme projecties


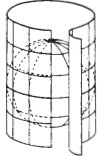
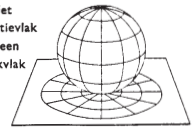







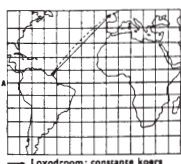
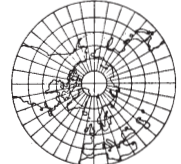

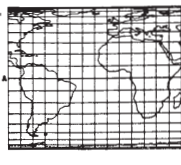
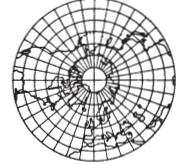

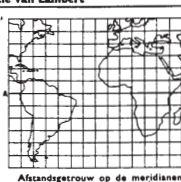
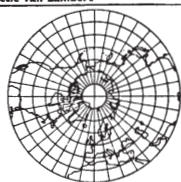

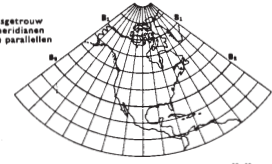
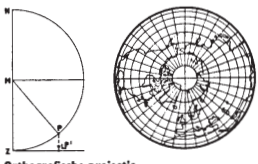
In de geodesie worden altijd conforme projecties gebruikt, omdat deze projecties gunstige wiskundige eigenschappen hebben en omdat de correcties van bol naar plat vlak meestal klein zijn. Conforme projecties hebben de eigenschappen, dat een klein

gebiedje gelijkvormig wordt afgebeeld in de kaart. De vervormingen worden pas groter als we een groter gebied bekijken. Dat wil zeggen, dat hoeken slechts heel kleine correcties krijgen en bij afstanden is de correctie onafhankelijk van het azimut van de lijn. Dit zijn twee grote voordelen. Voor lokale metingen in een klein gebied kan men de correcties zelfs verwaarlozen en net doen alsof men in het platte vlak meet.

Verschillen tussen cartografisch en geodetisch gebruik van kaartprojecties	
Cartografie	Geodesie
<ul style="list-style-type: none"> – tekenen – kaarten – aarde is bol – minder nauwkeurig (1 : 10³) – meeste projecties meetkundig – schaal 1 : 10 000 en kleiner – geografische coördinaten (φ, λ) – eenvoudige formules – vervormingsellips van Tissot – eigenschappen meetkundig te verklaren – automatisering bij kartering – tekenprogramma's – vele soorten projecties: <ul style="list-style-type: none"> . conforme projecties; . equivalente projecties; . equidistante projecties; . conventionele projecties (dit zijn alle overige projecties) – gebruik kaarten voor: zeevaart, luchtvaart, radiozenders, atlanten, verkeerskaarten, zeekaarten, topografische kaarten, geologische kaarten, weerkaarten, thematische kaarten 	<ul style="list-style-type: none"> – rekenen – coördinaten – aarde is ellipsoïde – nauwkeurig (1 : 10⁷) – projectie is wiskundig transformatie $w = f(z)$ – schaal 1 : 1 – isometrische coördinaten (q, λ) – gecompliceerde formules – vergroting $m = \left \frac{dw}{z} \right = \text{constant voor een punt}$ – eigenschappen wiskundig af te leiden – automatisering bij berekening – rekenprogramma's – alleen conforme projecties: <ul style="list-style-type: none"> . Mercator-projectie; . Stereografische projectie; . Lambert-projectie; . UTM-Gauss-Krüger-projectie – gebruik coördinaten voor geodetisch werk: RD, Kadaster, Topografische Dienst, Rijkswaterstaat AGI, Hydrografische Dienst, landmacht, luchtmacht, offshore industrie

Tabel 4.

KAARTPROJECTIES

	KEGELPROJECTIES	CYLINDERPROJECTIES	AZIMUTALE PROJECTIES
Projectievlakken	Het projectievlak is een kegelmantel 	Het projectievlak is een cylindermantel 	Het projectievlak is een raakvlak 
Ligging	Normale ligging 	Normale ligging  Transversale ligging 	Normale ligging  Transversale ligging  Schieve ligging 
Indeling naar eigenschappen	CONFORME PROJECTIES Hoeken veranderen niet		
	 Projectie van Lambert-Gauss	De loxodroom, d.i. de lijn op de aardbol die in elk punt dezelfde hoek met de N-Z richting maakt, is een rechte lijn. Daarom toepassing van deze projectie op kaarten voor de zeevaart.  Mercatorprojectie — Loxodroom: constante koers --- Orthodroom: kortste verbinding	 Stereografische projectie Deze projectie wordt gebruikt voor de Ned. topografische kaarten
	 Equivalente kegelprojectie	 Cylinderprojectie van Lambert	 Azimuthale projectie van Lambert
	EQUIDISTANTE PROJECTIES Bepaalde afstanden veranderen niet		
 Equidistante kegelprojectie Afstandgetrouw op de meridianen en de raakparallel	 Kwadratische platkaart Afstandgetrouw op de meridianen en de raakparallel	 Equidistante projectie In normale ligging afstandgetrouw op de meridianen	
Vervormde (gewijzigde) kegelprojecties			
 Men kan zich van deze projecties een voorstelling maken door in plaats van een raakkegelmantel een snijkegelmantel als projectievlak te beschouwen. Er zijn dan twee ware parallellen. Van deze projecties komt de equidistante in de atlas veelvuldig voor.	Onechte cylinderprojecties		
 Equidistante kegelprojectie met twee ware parallellen	Planisfeer van Hölzel		
TOELICHTING			
Waar mogelijk is naast het graadnetfiguurje een eenvoudige constructietekening geplaatst, om een indruk te geven van het principe waarop de projectie berust. In werkelijkheid worden eerst de coördinaten van de snijpunten van parallellen en meridianen berekend, daarna het graadnet geconstrueerd.			
M = Middelpunt aardbol O = Projectiecentrum P = Snijpunt parallel - meridiaan A-A = Raakparallel; ware parallel B-B = Snijparallel; ware parallel			
Centrale of gnomonische projectie			
 Orthografische projectie			
Schaal van de graadnetvoorbelden 1 : 300.000.000	Schaal van de graadnetvoorbelden 1 : 400.000.000	Schaal van de graadnetvoorbelden 1 : 400.000.000	

Figuur 3. Kaartprojecties, Verslag van de Studiedagen 1968, Kartografische Sectie van het Koninklijk Nederlands Aardrijkskundig Genootschap.

Een conforme projectie kan wiskundig beschreven worden door een complexe functie $w = f(z)$, waarbij w en z complexe getallen zijn. $z = x + iy$, waarbij x en y de rechthoekige coördinaten in het platte vlak zijn en $w = u + iv$, waarbij u en v de isometrische coördinaten op de bol of op de ellipsoïde zijn.

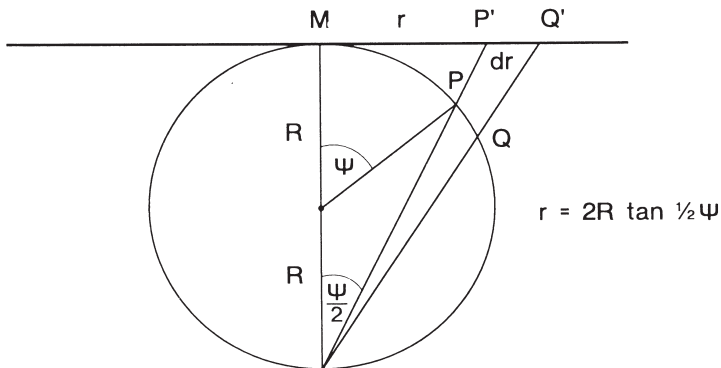
In het algemeen kan men de projecties verdelen in:

1. azimutale projecties, dat zijn projecties op het raakvlak aan de bol,
2. kegelprojecties,
3. cilinderprojecties, normaal en transversaal.

De bekendste conforme projecties zijn:

1. Stereografische projectie, gebruikt voor het Nederlandse RD-systeem. Dit is een azimutale projectie.
2. Mercator-projectie, gebruikt voornamelijk voor zeekaarten en landen in de buurt van de equator (cilinderprojectie).
3. Lambert-kegelprojectie, gebruikt voor landen met een grote oost-west afstand en kleine noord-zuid afstand. Bijvoorbeeld: België, Frankrijk (3 zones) en USA (3 zones).
4. Transversale Mercator-projectie (TM). Dit is hetzelfde als de Mercator-projectie, maar nu is de raakcirkel van de cilinder niet de equator, maar een gekozen meridiaan. Het land wordt in stroken verdeeld, die langs een meridiaan lopen, dus smal zijn in oost-west richting. Elke strook wordt volgens de TM-projectie afgebeeld in het platte vlak. Voorbeelden: Duitsland, Scandinavië (stroken van 3° breedte). Voor de gehele wereld wordt deze projectie ook gebruikt. Daarbij is de hele aarde opgedeeld in zones van 6° breedte. Dit wordt de Universele TM-projectie (UTM) genoemd.

6. Stereografische projectie en RD-coördinaten



Figuur 4.

De projectie van bol naar plat vlak is eenvoudig meetkundig voor te stellen als een projectie vanuit het tegenpunt. De kaartafstand van een willekeurig punt P' tot het centrum M is r :

$$r = 2R \tan \frac{1}{2} \psi \quad (16)$$

R is de straal van de raakbol aan de aarde, in Nederland 6382,6 km. ψ is de boogafstand van M tot P op de bol.

De *vergroting* m van een lijnstuk PQ op de bol, $Rd\psi$, ten opzichte van het overeenkomstige lijnstuk $P'Q' = dr$ in het vlak volgt uit differentiëren van (16):

$$m = \frac{dr}{R d\psi} = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \psi} = 1 + \frac{r^2}{4R^2} \quad (17)$$

Bijvoorbeeld: voor $r = 100$ km is $m = 1,000\ 0614$, dat is 6 cm per km, dus niet verwaarloosbaar. In Nederland is deze projectie gebruikt bij de berekening van het RD-systeem. Het centrale punt M is de stang (zoals die in 1895 was) van de Onze Lieve Vrouwetoren in Amersfoort. De coördinaten van Amersfoort zijn in decimale graden op de Bessel-ellipsoïde:

$$\text{breedte } \varphi = 52^\circ,156\ 160\ 556, \text{ lengte } \lambda = 5^\circ,387\ 638\ 889$$

Er is een modificatie aangebracht door het raakvlak iets lager te kiezen, onder M, zodat het een snijvlak wordt. De afbeelding in het platte vlak wordt daardoor verkleind met een factor k :

$$k = 0,999\ 9079$$

Daardoor wordt de projectieformule:

$$r = 2kR \tan \frac{1}{2}\psi \quad (18)$$

en de vergroting:

$$m = k \left(1 + \frac{r^2}{4R^2} \right) = 0,999\ 9079 + 6,135 \cdot r^2 \cdot 10^{-9} \quad (r \text{ in km}) \quad (19a)$$

De correctie van een gemeten afstand S is $c \cdot S$ met:

$$c = -92 + \frac{r^2}{163} \text{ mm per km} \quad (r \text{ in km}) \quad (19b)$$

Voor een lange afstand met als eindpunten r_1 en r_2 is m variabel langs de verbindingslijn en moeten we m integreren om de correctie c te berekenen. Dit komt er op neer, dat we in (19a) en (19b) r^2 kunnen berekenen als:

$$r^2 = \frac{1}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

Afstanden, gemeten in werkelijkheid, moeten gecorrigeerd worden met m om de afstand S te krijgen die uit de RD-coördinaten berekend wordt, dus:

$$S_{RD} = m \cdot S_{\text{gemeten}} = S_{\text{gemeten}} + c \cdot S_{\text{gemeten}} \quad (20)$$

Ook richtingen moeten gecorrigeerd worden. De richting of het azimut van een lijn \vec{AB} is:

$$\left(\vec{AB} \right)_{RD} = \left(\vec{AB} \right)_{\text{gemeten}} + d \left(\vec{AB} \right)$$

met:

$$d \left(\vec{AB} \right) = (-x_A y_B + x_B y_A) \cdot 0,3906 \cdot 10^{-6} \text{ gon}$$

x en y zijn coördinaatverschillen ten opzichte van het centrale punt Amersfoort, in km uitgedrukt. De richtingscorrectie is in decimale graden (gon). Het azimut wordt rechtsonder gemeten vanaf het noorden.

De constante is berekend volgens:

$$\frac{100}{2\pi R^2} = 0,3906 \cdot 10^{-6}$$

Rechthoekige RD-coördinaten krijgt men door de poolcoördinaten (r, α) te vervangen door (x, y). α is het azimut van de lijn MP, gerekend vanaf het noorden, rechtsom via oost naar zuid en west.

$$x = r \sin \alpha + x_0$$

$$y = r \cos \alpha + y_0$$

x_0 en y_0 zijn de coördinaten van Amersfoort.

$$x_0 = 155000 \quad y_0 = 463000$$

x_0 en y_0 zijn zodanig gekozen dat voor heel Nederland de x -coördinaten steeds tussen 0 en 280 km liggen en de y -coördinaten tussen 300 en 700 km. Alle coördinaten zijn dus positief en er is geen verwisseling tussen x en y mogelijk. Vroeger, toen de x_0 en y_0 nog niet waren ingevoerd, gaf de verwisseling van x en y wel eens aanleiding tot grote fouten.

Voor de precieze berekening van de RD-coördinaten uit breedte en lengte (φ, λ) zijn deze formules nog niet voldoende. Dan moet men ook rekening houden met de afplatting van de aarde, dus de bol vervangen door een ellipsoïde. De RD-coördinaten worden berekend volgens de zogenaamde dubbelprojectie van Schreiber. Eerst wordt de ellipsoïde conform geprojecteerd op de bol volgens de projectie van Gauss. Vervolgens wordt de bol geprojecteerd op het platte vlak volgens de stereografische projectie die hier boven beschreven is.

De conforme projectie van Gauss van ellipsoïde op bol gaat volgens de volgende formules:

Er worden twee hulpgrootheden berekend, de zogenaamde isometrische breedte op de ellipsoïde (q) en op de bol (w). De gewone breedte en lengte op ellipsoïde en bol zijn respectievelijk φ, λ en B, L . De excentriciteit van de ellipsoïde is e .

$$q = \ln \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2} \varphi \right) - \frac{1}{2} e \ln \left(\frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)$$

$$w = \ln \tan \left(45^\circ + \frac{1}{2} B \right)$$

De conforme projectie is dan:

$$w = nq + m$$

en

$$L = n(\lambda - \lambda_0) + \lambda_0$$

n en m zijn constanten die afhankelijk zijn van de breedte φ_0 van het centrale projectiepoint Amersfoort. λ_0 is de lengte van Amersfoort.

$$n = \sqrt{1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0} \quad \text{met} \quad e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \quad (\text{zie formule 7b})$$

$$\sin B_0 = \frac{1}{n} \sin \varphi_0$$

Hierna volgen q_0 en w_0 met bovenstaande formules uit φ_0 en B_0 .

Dan is:

$$m = w_0 - nq_0$$

De straal van de bol is, met N_0 en M_0 de hoofdkromtestralen van de ellipsoïde in Amersfoort (formules (3) en (4)):

$$R = \sqrt{N_0 M_0}$$

Zie voor de afleiding van de formules het boek: *Radio Positioning at Sea*.

De *meridiaanconvergentie* γ is de hoek tussen het kaart-noorden en het echte noorden, dus de hoek tussen de gridlijnen van de kaart en de afbeelding van de meridiaan.

Voor de stereografische projectie geldt exact:

$$\tan \frac{1}{2} \gamma = \tan \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0) \frac{\sin \frac{1}{2} (\varphi + \varphi_0)}{\cos \frac{1}{2} (\varphi - \varphi_0)}$$

of in eerste benadering:

$$\gamma = (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi$$

waarbij λ_0 de centrale meridiaan is, en φ_0 de breedte van Amersfoort.

De afleiding van bovenstaande formule is een goede oefening in de boldriehoeksmetkunde.

Tenslotte is nog een belangrijke eigenschap van de stereografische projectie, dat cirkels op de bol (grote en kleine cirkels) ook in de projectie weer cirkels worden. Voor de stereografische projectie van Nederland betekent dit dat de meridianen en parallellen in de projectie cirkelbogen zijn. Voor sommige speciale toepassingen van kaarten, is deze eigenschap belangrijk, bijvoorbeeld voor het afbeelden van punten die een bepaalde

afstand tot een radiozender hebben of voor sterrenkaarten, waarop sterren met een bepaalde zenitafstand op een cirkel liggen.

Geschiedenis van de metingen ter bepaling van het basispunt Amersfoort

Ing. F.H. Schreutelkamp

Stichting 'De Koepel', sterrenwacht 'Sonnenborgh' te Utrecht

Het horizontale geodetische driehoeksnet bestaat uit een verzameling punten waarvan de geodetische coördinaten berekend zijn op een referentie-ellipsoïde. In Nederland is dat de Bessel-ellipsoïde, welke wordt bepaald door de halve lange as (a) en de afplatting (f). Voor deze berekening moet allereerst de positie en de oriëntering van de ellipsoïde ten opzichte van de aarde worden vastgelegd. Hiervoor zijn drie translatie- en drie rotatieparameters nodig (Strang van Hees, 1997). Deze parameters kunnen als volgt worden gekozen:

- de geodetische coördinaten (φ_0, λ_0) van het basispunt (Amersfoort) op de ellipsoïde,
- het geodetische azimut (A_0) van een driehoekszijde op de ellipsoïde,
- de schietloodafwijkingen (ξ_0, η_0) in het basispunt (zie hoofdstuk 18),
- de geoidhoogte (N_0) in het basispunt.

Als men alleen de horizontale coördinaten wil berekenen dan is de aanname van φ_0, λ_0 en A_0 op de gekozen referentie-ellipsoïde voldoende. Als men bovendien de hoogten van (gewaterpaste) punten boven de ellipsoïde wil berekenen dan moeten ook ξ_0, η_0 en N_0 worden vastgelegd. Tevens moet het verloop van de geoid worden bepaald uit zwaartekrachtdata.

In veel landen (echter niet in Nederland) zijn daartoe in het basispunt astronomische breedte-, lengte-, en azimutbepalingen gedaan. Vervolgens heeft men de ellipsöïdische φ_0, λ_0 en A_0 gelijkgesteld aan de waargenomen astronomische grootheden ($\Phi_0, \Lambda_0, \alpha_0$). Deze methode heeft twee nadelen:

1. De oriëntatie van de referentie-ellipsoïde en de ligging van het geodetische driehoekshoeksnet kunnen onnauwkeurig worden als de astronomische waarnemingen onnauwkeurig zijn uitgevoerd.
2. Als de geoid in het basispunt sterker verloopt dan in de rest van het land, ten gevolge van (lokale) massa-onregelmatigheden, dan komt de referentie-ellipsoïde, welke raakt aan de geoid in het basispunt, scheef te liggen ten opzichte van de rest van het land.

In Nederland is omstreeks 1900 een betere methode gebruikt om de oriëntatie van de Bessel-ellipsoïde te bepalen, alsmede de ligging van het basispunt, de Onze Lieve Vrouwetoren te Amersfoort, op deze ellipsoïde. Daartoe heeft men onder leiding van de Leidse hoogleraar H.G. van de Sande Bakhuyzen in 1893/94 te Ubagsberg astro-geodetische waarnemingen verricht. Vervolgens heeft men tussen 1896 en 1899, ditmaal onder leiding van de Utrechtse hoogleraar J.A.C. Oudemans, op 13 verschillende primaire stations verspreid over het gehele land (echter niet in Amersfoort) eveneens astro-geodetische waarnemingen verricht. Op deze 14 stations werden breedte en azimut naar een naburig punt bepaald met behulp van universeel-instrumenten van Repsold, afkomstig van de Utrechtse en Leidse sterrewacht (H.G. van de Sande Bakhuyzen, 1905 en J.A.C. Oudemans, 1904). De lengte van deze stations werd echter niet bepaald daar een lengtebepaling veel moeilijker was in die tijd; men beschikte niet over nauwkeurige transporteerbare klokken.

Vanuit deze astronomische stations heeft Heuvelink in 1903, via het hoofddriehoeksnet, de breedte van Amersfoort en het azimut van de zijde Amersfoort – Utrecht berekend (H.J. Heuvelink, 1918). Zodoende verkreeg men 13 verschillende breedten en azimuts voor Amersfoort (station Groningen is in deze berekeningen weggelaten daar de nodige gegevens nog niet beschikbaar waren). Hiervan heeft men het gemiddelde genomen als definitieve ellipsoïdische breedte en azimut. Dit komt er op neer dat de oriëntatie van de ellipsoïde zodanig is bepaald dat in deze 13 punten een best passende aansluiting op de geoïde werd verkregen: de invloed van de schietloodafwijkingen wordt op deze wijze zo veel mogelijk geëlimineerd. Op pagina 30 is een kopie opgenomen uit de publicatie van H.J. Heuvelink: De stereografische kaartprojectie en hare toepassing bij de Rijksdriehoeksmeting (1918). Hier zijn de breedte en het azimut opgegeven van de 13 oorspronkelijke astro-geodetische stations. Momenteel wordt met GPS een nieuw geodetisch netwerk gemeten, het GPS-kernnet. Bovendien is de 5e Nauwkeurigheidswaterpassing uitgevoerd en wordt het zwaartekrachtmetingsnet verdicht. Hiermee kan men de geoïde verbeteren en een betere aansluiting aan de Bessel-ellipsoïde berekenen.

Ter controle vergeleek men het door R. Posthumus Meyjes bepaalde azimut Utrecht – Amersfoort (1896) met de reeds eerder uitgevoerde bepalingen van J.A.C. Oudemans (1879/80) (J.A.C. Oudemans, 1904 en 1881). De breedte op het station Utrecht (Domtoren) werd gecontroleerd met de astronomische breedte van sterrenwacht 'Sonnenborgh' (pilaar voor het universeelinstrument) die op verschillende manieren en met diverse instrumenten was bepaald tussen 1857 en 1903. Het resultaat van R. Posthumus Meyjes kon van de Dom tot de sterrenwacht worden herleid door gebruik te maken van een speciaal lokaal driehoeksnet welke in juli 1885 was opgesteld (J.A.C. Oudemans, 1904).

De lengte van Amersfoort is als volgt bepaald. Jarenlang hebben astronomen van de Leidse sterrenwacht met behulp van de grote meridiaancirkel van Pistor & Martins lengtebepalingen uitgevoerd ten opzichte van Leipzig (1867), Brussel (1868), Bonn (1870), Greenwich (1880/81) en Parijs (1884) waaruit de lengte van de Leidse ster-

renwacht berekend kon worden, namelijk $17^m56^s,151$ ($= 4^{\circ},483\ 9641$) ten oosten van Greenwich (H.G. van de Sande Bakhuyzen, 1893 en Th. Albrecht 1904/05). Later heeft men ook nog eens het lengteverschil bepaald ten opzichte van Ubagsberg (1893) (H.G. van de Sande Bakhuyzen, 1905) voor aansluiting op het Duitse en Belgische hoofd-driehoeksnet. Met behulp van het primaire driehoeksnet, dat tussen 1885 en 1904 was ingemeten, werd het mogelijk het lengteverschil tussen Leiden en Amersfoort geodetisch te berekenen ($0^{\circ},903\ 6748$), zodat een redelijk goede lengte voor Amersfoort verkregen werd: $5^{\circ},387\ 6389$ ten oosten van Greenwich (H.J. Heuvelink 1918, 1921 en 'De Ingenieur', 1929).

Tussen 1899 – 1906 en 1915 – 1922 zijn er, met het oog op het onderzoek van de breedteveranderingen in de tijd (ten gevolge van de poolbeweging), waarnemingen verricht met behulp van de zenit-telescoop op de Leidse sterrenwacht (De Ingenieur, 1929).

De merkwaardige situatie doet zich nu voor, dat we in Nederland een basispunt hebben met goede ellipsoidische breedte, lengte en azimut, maar zonder dat er ter plaatse astronomische metingen zijn verricht. De breedte φ_0 en het azimut A_0 zijn vastgesteld in 1903, de lengte λ_0 pas in 1918. Pas midden jaren 1970 heeft men, in opdracht van de Rijkscommissie voor Geodesie, in Amersfoort astro-geodetische metingen verricht evenals op 31 andere stations in Nederland (G.J. Husti, 1978). Dit ter controle van de ligging van het Europese driehoeksnet ED-50 door middel van zes Laplace-stations (G.J. Husti, 1975) en ter bepaling van de astro-geoïde binnen Europa (G.J. Husti, 1978 en J. Brennecke, 1983).

Basismeting

Om de lengten van alle zijden van het driehoeksnet te kunnen berekenen heeft men minstens één bekende lengte nodig: de basis. Daarom onderzocht men in 1889 of de door F.J. Stamkart gemeten basis (1868–1869) in de Haarlemmermeer gebruikt kon worden voor de berekening van de nieuwe driehoeksmeting. Hoewel deze voldoende nauwkeurig was gemeten, bleek dat de omliggende primaire punten niet zichtbaar waren vanuit beide basisuiteinden, omdat bomen en huizen het uitzicht belemmerden. De slappe ondergrond maakte het, vooral financieel gezien, onmogelijk om de noodzakelijke twaalf meter hoge torens te bouwen. Daarom werd besloten om te zien naar een gebied met een stabielere ondergrond. Nadat een geschikt terrein was gevonden op de 'Garderbroeksche Heide' (tussen Amersfoort en Apeldoorn) werd, in 1904, besloten de basis te meten met een geleende uitrusting van het 'Pruisisch Geodetisch Instituut' te Potsdam. Zoals spoedig bleek, was de uitrusting van slechte kwaliteit. Nadat Van de Sande Bakhuyzen in 1911 een basismeting van het Franse 'Service Geographique de l'armée' nabij Lyon had bijgewoond (gemeten met een 4 meter invar meetstaaf) werd in 1912 besloten deze uitrusting te lenen voor de uiteindelijke basismeting. Tot die tijd ging men voor de (voorlopige) berekening van coördinaten uit van de lengte

Ubagsberg – Klifsberg, welke was afgeleid uit de basis bij Bonn, die in 1892 was gemeten door de Duitsers.

De definitieve basis werd uitgezet op de weg van Amersfoort naar Apeldoorn, nabij het plaatsje Stroe en werd gemeten in de periode van 12 juli tot en met 5 augustus 1913. De totale lengte van de basis, $4320,0438 \pm 0,0021$ meter (volgens RD 4320,0396 meter), was verdeeld in zeven secties van 576 meter en één sectie van 288 meter. De eind- en tussenpunten werden ondergronds verzekerd door bronzen bouten in zware betonblokken. De metingen werden uitgevoerd onder leiding van H.J. Heuvelink, met medewerking van de Franse luitenant-generaal A. Lallemand, die al enkele basismetingen had verricht met het Franse toestel. Door de basis door middel van hoekmeting te verbinden met de punten Amersfoort en Lunterscheide kon de basis van Stroe (1913) worden gekoppeld aan het hoofddriehoeksnet. In 1918 kon de lengte van de basis worden vastgesteld, uitgaande van de lengte van de meetstaaf, afgeleid uit die van de Nederlandse platina-iridium meter. Volgens het onderzoek in 1921–1922, uitgevoerd door het 'Bureau International des Poids et Mesures' te Sèvres, bedraagt de aangenomen lengte slechts één miljoenste minder dan de internationale meter. Voor de basismeting van Stroe zou dit een correctie van 4,2 mm betekenen: oftewel 1 mm/km. Gezien het geringe verschil heeft men deze correctie niet aangebracht (De Ingenieur, 1929, G.J.I.M. Lobé, 1985 en H.J. Heuvelink, 1932). Door wegverbreding is de basis bij Stroe verloren gegaan. Daarom heeft men in 1957 op de Loenermark (bij Apeldoorn) een nieuwe (ijk)basis aangelegd voor de ijking van invardraden en ter controle van de afstandsmeters van de afdeling RD. De basis heeft een lengte van $576,09226 \pm 0,00003$ meter en werd gemeten met behulp van lichtinterferometrie volgens het principe van prof. Väisälä. De eindpunten van deze ijkbasis zijn met messing bouten in betonnen kelder verzegeld (G.J. Bruins, 1964 en F.J.J. Brouwer, 1985).

Referenties

1. OUDEMANS, J.A.C., Détermination à Utrecht de l'azimut d'Amersfoort, Commission Géodésique Néerlandaise, Den Haag, 1881.
2. PLAATS, J.P. VAN DER, Overzicht van de Graadmeting in Nederland, Utrecht, 1889.
3. SANDE BAKHUYZEN, H.G. VAN DE, 'Résultats d'une compensation du réseau des longitudes' uit *Astronomische Nachrichten* 3202, Band 134 (1894), pp. 153-160.
4. OUDEMANS, J.A.C., Déterminations de la latitude et d'un azimut aux stations Oirschot, Utrecht, Sambeek, Wolberg, Harikerberg, Sleen, Schoorl, Zierikzee, Terschelling, Ameland, Leeuwarden, Urk et Groningue, Commission Géodésique Néerlandaise, Delft, 1904, pp. V-LVI.
5. ALBRECHT, TH., geeft voor de lengte van Leiden $17^m 56^s,149$; 'Ausgleichung des zentral-europäischen Längennetzes' uit *Astronomische Nachrichten* 3993-94, Band 167 (1904/05), pp. 145-162.

6. SANDE BAKHUYZEN, H.G. VAN DE, Déterminations de la différence de longitude Leyde–Ubagsberg, de l'azimut de la direction Ubagsberg–Sittard et de la latitude d'Ubagsberg, Commission Géodésique Néerlandaise, Delft, 1905.
7. HEUVELINK, H.J., De stereografische kaartprojectie en hare toepassing bij de Rijksdriehoeksmeting, Netherlands Geodetic Commission, Delft, 1918.
8. HEUVELINK, H.J., Triangulation de Royaume des Pays-Bas, Tome second, Commission Géodésique Néerlandaise, Delft, 1921.
9. HEUVELINK, H.J., Travaux Géodésique exécutés aux Pays-Bas 1924, 1925 et 1926. Note présentée a la troisième assemblée générale de l'UGGI, Commission Géodésique Néerlandaise, Delft, 1927.
10. DE RIJKSCOMMISSIE voor Graadmeting en Waterpassing 1879-1929 uit De Ingenieur, No. 7 (1929), pp. 1-10.
11. HEUVELINK, H.J., De basis bij Stroe 1913, Rijkscommissie voor graadmeting en waterpassing, Delft, 1932.
12. BRUINS, G.J., Standard Base 'Loenermark', Rijkscommissie voor Geodesie, Delft, 1964.
13. HUSTI, G.J., Geodetic-astronomical observations in The Netherlands, 1947–1973, Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Vol. 6, No. 1, Delft, 1975.
14. STRANG VAN HEES, G.L., 'Oriëntation of the ellipsoid in geodetic networks' uit Delft Progress Report 3, p. 35-38, (1977).
15. HUSTI, G.J., Deviations of the vertical in The Netherlands from geodetic-astronomical observations, Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Vol. 6, No. 3, Delft, 1978.
16. BRENNECHE, J., LELGEMANN, D., REINHART, E., TORGE, W., WEBER, G. EN WENZEL, H.G., 'A European Astro-Gravimetric Geoid', Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft Nr. 269, 1983.
17. LOBÉ, G.J.I.M., 'De geschiedenis van Rijksdriehoeksmeting' uit NGT Geodesia 10 (1985), pp. 320-325.
18. BROUWER, F.J.J., BUREN, J. VAN, 'Het RD-net in Europees verband' uit NGT Geodesia 10 (1985), pp. 336-341.
19. MIN, E.J. DE, De geoïde voor Nederland, Nederlandse Commissie voor Geodesie, publicatie 34, Delft, 1996.

De stereografische kaartprojectie in hare toepassing

bij

de Rijksdriehoeksmeting

door

H.K. J. HEUVELINK, c. i.

Hoogleraar aan de Technische Hoogeschool te Delft.

Uit ieder van de onder 1 en 2 genoemde breedten en azimuths afzonderlijk werden door berekening volgens *Formules en tafels, enz.* (Delft 1903) de overeenkomstige waarden voor Amersfoort afgeleid en ter vaststelling van de voor de berekening der driehoeksmeting benodigde waarden werden de gemiddelden genomen volgens onderstaande tabel.

Uit de metingen te	Geografische breedte van Amersfoort	Azimuth Amersfoort—Utrecht
Oirschot	52° 9' 22",947	248° 35' 22",992
Utrecht	20,856	21,188
Sambeek	21,276	16,253
Wolberg	22,107	20,302
Harikerberg	22,851	17,126
Sleen	23,466	18,871
Schoorl	21,082	20,804
Zicrikzee	21,339	21,105
Brandaris	20,937	22,442
Ameland	21,431	22,424
Leeuwarden	22,707	20,291
Urk	21,178	18,769
Ubagsberg	26,134	16,012
	288,311	258,579
Gemiddeld	52° 9' 22",178	248° 35' 19",891

Figuur 5. Uit: H.J. Heuvelink, De stereografische kaartprojectie en hare toepassing bij de Rijksdriehoeksmeting, Rijkscommissie voor Graadmeting en Waterpassing, 1918.

7. Transformatie van RD-coördinaten naar geografische coördinaten

De stereografische projectie in Nederland is een zogenaamde dubbelprojectie. Dit wil zeggen, dat de punten op de ellipsoïde van Bessel eerst worden geprojecteerd op de bol volgens de conforme projectie van Gauss. Vervolgens worden de punten op de bol geprojecteerd in het platte vlak volgens de stereografische projectie. De formules zijn beschreven in het boek *Radio Positioning at Sea* door G. Bakker, J.C. de Munck en G.L. Strang van Hees (Delft, 1989).

Hieronder volgen de constanten en de formules voor de praktische berekening.

Constanten	
<hr/>	
Ellipsoïde van Bessel (1841):	$a = 6\,377\,397,155\text{ m}$
excentriciteit	$e = 0,081\,696\,8312\,22$
Basispunt Amersfoort:	
breedte op ellipsoïde	$\varphi_0 = 52^\circ,156\,160\,556$
lengte op ellipsoïde	$\lambda_0 = 5^\circ,387\,638\,889$
breedte op bol	$B_0 = 52^\circ,121\,097\,249$
lengte op bol	$L_0 = 5^\circ,387\,638\,889$
Constanten Gauss-projectie:	
	$n = 1,000\,475\,856\,68$
	$m = 0,003\,773\,953\,832$
straal bol	$R = 6382\,644,571\text{ m}$
Constanten RD-systeem:	
	$k = 0,999\,9079$
	$x_0 = 155\,000\text{ m}$
	$y_0 = 463\,000\text{ m}$

Tabel 5.

Berekening van RD-coördinaten (x, y) vanuit breedte en lengte (φ , λ)

Gegeven op de ellipsoïde: φ , λ .

$$q' = \text{Intan}\left(\frac{1}{2}\varphi + 45^\circ\right) = \text{atanh}(\sin\varphi) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}\right)$$

$$\Delta q = \frac{1}{2}e \ln\left(\frac{1 + e \cdot \sin\varphi}{1 - e \cdot \sin\varphi}\right) = e \cdot \text{atanh}(e \cdot \sin\varphi)$$

$$q = q' - \Delta q \quad (q \text{ is de isometrische breedte op de ellipsoïde})$$

$$w = nq + m \quad (w \text{ is de isometrische breedte op de bol})$$

$$B = 2 \text{atan}(\exp(w)) - 90^\circ \quad (B \text{ is de breedte op de bol})$$

$$\Delta L = n(\lambda - \lambda_0) \quad (L \text{ is de lengte op de bol})$$

$$\sin^2 \frac{1}{2}\psi = \sin^2 \frac{1}{2}(B - B_0) + \sin^2 \frac{1}{2}\Delta L \cos B \cos B_0$$

$$\cos \frac{1}{2}\psi = \left(1 - \sin^2 \frac{1}{2}\psi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\tan \frac{1}{2}\psi = \frac{\sin \frac{1}{2}\psi}{\cos \frac{1}{2}\psi}$$

$$\sin \psi = 2 \sin \frac{1}{2}\psi \cos \frac{1}{2}\psi$$

$$\cos \psi = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}\psi$$

$$\sin \alpha = \sin \Delta L \frac{\cos B}{\sin \psi}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sin B - \sin B_0 \cos \psi}{\cos B_0 \sin \psi}$$

$$r = 2kR \tan \frac{1}{2}\psi$$

$$x = r \sin \alpha + x_0$$

$$y = r \cos \alpha + y_0$$

Controle: $\varphi = 53^\circ$, $\lambda = 6^\circ$, $x = 196\,105,283$ m, $y = 557\,057,739$ m.

Berekening van lengte en breedte vanuit RD-coördinaten (x, y)

Gegeven: x en y.

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{x - x_0}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{y - y_0}{r}$$

$$\psi = 2 \operatorname{atan} \left(\frac{r}{2kR} \right)$$

$$\sin B = \cos \alpha \cos B_0 \sin \psi + \sin B_0 \cos \psi$$

$$\sin \Delta L = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \psi}{\cos B}$$

$$\lambda = \frac{\Delta L}{n} + \lambda_0$$

$$w = \operatorname{Intan} \left(\frac{1}{2} B + 45^\circ \right) = \operatorname{atanh}(\sin B)$$

$$q = \frac{(w - m)}{n}$$

$$\varphi' = 2 \operatorname{atan}(\exp(q)) - 90^\circ \quad (\text{benaderde waarde})$$

$$\Delta q = \frac{1}{2} e \ln \left(\frac{1 + e \sin \varphi'}{1 - e \sin \varphi'} \right) = e \operatorname{atanh}(e \sin \varphi')$$

$$\varphi = 2 \operatorname{atan}(\exp(q + \Delta q)) - 90^\circ = \operatorname{asin}(\tanh(q + \Delta q))$$

Hierna volgt viermaal iteratie om een betere waarde van Δq te berekenen met de verbeterde φ .

Controle: $x = 100\,000$ m, $y = 400\,000$ m, $\varphi = 51^\circ,587\,1380$, $\lambda = 4^\circ,593\,9185$.

Reeksontwikkeling

Voor de voorgaande berekening is ook een reeksontwikkeling berekend die gepubliceerd is in de HTW 1956. Deze reeksontwikkeling is verbeterd en uitgebreid met meer termen. De coëfficiënten zijn verbeterd door ir. T.G. Schut van de Rijksdriehoeksmeting. Dit is gepubliceerd in NGT Geodesia, juni 1992. De onderstaande formules

hebben een precisie van beter dan 0,2 mm voor geheel Nederland. De formules zijn de volgende:

Centraal punt

$$\begin{aligned} x_0 &= 155\,000,00 \text{ m} & \varphi_0 &= 52^\circ,156\,160\,556 \\ y_0 &= 463\,000,00 \text{ m} & \lambda_0 &= 5^\circ,387\,638\,889 \end{aligned}$$

Transformatie van RD (x, y) naar breedte (φ) en lengte (λ)

$$dx = (x - x_0) \cdot 10^{-5}$$

$$dy = (y - y_0) \cdot 10^{-5}$$

$$\begin{aligned} d\varphi &= A_{01} \cdot dy + A_{20} \cdot dx^2 + A_{02} \cdot dy^2 + A_{21} \cdot dx^2 \cdot dy + A_{03} \cdot dy^3 + \\ &A_{40} \cdot dx^4 + A_{22} \cdot dx^2 \cdot dy^2 + A_{04} \cdot dy^4 + A_{41} \cdot dx^4 \cdot dy + \\ &A_{23} \cdot dx^2 \cdot dy^3 + A_{42} \cdot dx^4 \cdot dy^2 + A_{24} \cdot dx^2 \cdot dy^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\lambda &= B_{10} \cdot dx + B_{11} \cdot dx \cdot dy + B_{30} \cdot dx^3 + B_{12} \cdot dx \cdot dy^2 + \\ &B_{31} \cdot dx^3 \cdot dy + B_{13} \cdot dx \cdot dy^3 + B_{50} \cdot dx^5 + B_{32} \cdot dx^3 \cdot dy^2 + \\ &B_{14} \cdot dx \cdot dy^4 + B_{51} \cdot dx^5 \cdot dy + B_{33} \cdot dx^3 \cdot dy^3 + B_{15} \cdot dx \cdot dy^5 \end{aligned}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{d\varphi}{3600} \qquad \lambda = \lambda_0 + \frac{d\lambda}{3600}$$

A	Coëfficiënt	B	Coëfficiënt
01	3236,033 1637	10	5261,302 8966
20	-32,591 5821	11	105,978 0241
02	-0,247 2814	12	2,457 6469
21	-0,850 1341	30	-0,819 2156
03	-0,065 5238	31	-0,056 0092
22	-0,017 1137	13	0,056 0089
40	0,005 2771	32	-0,002 5614
23	-0,000 3859	14	0,001 2770
41	0,000 3314	50	0,000 2574
04	0,000 0371	33	-0,000 0973
42	0,000 0143	51	0,000 0293
24	-0,000 0090	15	0,000 0291

Tabel 6.

Transformatie van breedte (φ) en lengte (λ) naar RD (x, y)

$$d\varphi = (\varphi - \varphi_0) \cdot 0,36$$

$$d\lambda = (\lambda - \lambda_0) \cdot 0,36$$

$$dx = C_{01} \cdot d\lambda + C_{11} \cdot d\varphi \cdot d\lambda + C_{21} \cdot d\varphi^2 \cdot d\lambda + C_{03} \cdot d\lambda^3 + \\ C_{31} \cdot d\varphi^3 \cdot d\lambda + C_{13} \cdot d\varphi \cdot d\lambda^3 + C_{23} \cdot d\varphi^2 \cdot d\lambda^3 + \\ C_{41} \cdot d\varphi^4 \cdot d\lambda + C_{05} \cdot d\lambda^5$$

$$dy = D_{10} \cdot d\varphi + D_{20} \cdot d\varphi^2 + D_{02} \cdot d\lambda^2 + D_{12} \cdot d\varphi \cdot d\lambda^2 + \\ D_{30} \cdot d\varphi^3 + D_{22} \cdot d\varphi^2 \cdot d\lambda^2 + D_{40} \cdot d\varphi^4 + D_{04} \cdot d\lambda^4 + \\ D_{32} \cdot d\varphi^3 \cdot d\lambda^2 + D_{14} \cdot d\varphi \cdot d\lambda^4$$

$$x = x_0 + dx$$

$$y = y_0 + dy$$

C	Coëfficiënt	D	Coëfficiënt
01	190 066,989 03	10	309 020,318 10
11	-11 830,858 31	02	3638,361 93
21	-114,197 54	12	-157,952 22
03	-32,383 60	20	72,971 41
31	-2,340 78	30	59,797 34
13	-0,606 39	22	-6,434 81
23	0,157 74	04	0,093 51
41	-0,041 58	32	-0,073 79
05	-0,006 61	14	-0,054 19
		40	-0,034 44

Tabel 7.

Controle: $\varphi = 53^\circ$, $\lambda = 6^\circ$, $x = 196\ 105,283$, $y = 557\ 057,741$.

8. Lambert-projectie in België

De Lambert-projectie is een conforme kegelprojectie. De raakcirkel tussen kegel en bol is een parallelcirkel. Ook kan men de kegel laten snijden met de bol. Dan heeft men twee snijcirkels, waardoor de vergroting dicht bij 1 blijft.

In de kaart zijn de meridianen rechte lijnen, die taps toelopen (convergeren). De kaart wordt verkregen door de kegel uit te klappen. Langs de centrale parallelcirkel is de vergroting gelijk aan 1, zodat de projectie goed is in een smalle oost-west strook langs een parallelcirkel. Deze projectie wordt gebruikt in België, Frankrijk, USA en nog vele andere landen. De projectieformules zijn voor de bol naar de kegel met één raakcirkel:

$$r = k \cdot \left(\tan \frac{1}{2} \psi\right)^p \quad (\psi = 90^\circ - \varphi)$$

$$\theta = p \cdot (\lambda - \lambda_0) \quad (\lambda_0 = \text{de centrale meridiaan})$$

$$p = \cos \psi_0 = \sin \varphi_0 \quad (\varphi_0 = \text{de breedte van de raakcirkel})$$

$$k = R \tan \psi_0 \cdot \left(\tan \frac{1}{2} \psi_0\right)^{-p}$$

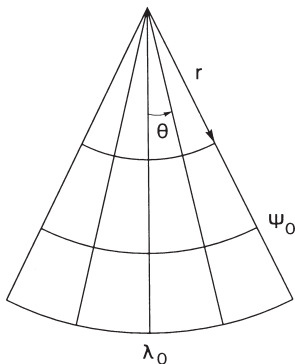
$$m = \frac{p \cdot r}{R \cos \varphi} \quad (\text{vergroting})$$

met:

r = de afstand vanaf de top van de kegel,

θ = de hoek van de meridiaan in de top van de kegel,

R = de straal van de bol.



Figuur 6.

Voor geodetisch gebruik moet men echter de formules van de ellipsoïde naar de kegel gebruiken, met twee snijcirkels van de kegel met de ellipsoïde. Deze zijn beschreven door ir. G. Bakker in *Radio Positioning at Sea*.

België

De formules zijn uitgewerkt voor België door het Nationaal Geografisch Instituut te Brussel in het boekje *Referentiesystemen en transformatieformules in gebruik in België*. Hieronder volgt een samenvatting van de formules, die gelden voor de projectie van de Hayford-ellipsoïde.

De kleine correcties α , Δx en Δy worden veroorzaakt doordat men in 1972 de definitie van het Belgische systeem heeft herzien. Om de verschillen tussen het oude en nieuwe systeem zo klein mogelijk te maken zijn een rotatie α en een verschuiving Δx en Δy ingevoerd.

Constanten

a	=	6378 388
f	=	1 : 297 (ellipsoïde van Hayford)
λ_0	=	4°,356 939 72
p	=	0,771 642 1928
k	=	11 565 915,812 935
α	=	29",2985 = 0°,008 138 47
Δx	=	0,01256 m
Δy	=	88,4378 m

Tabel 8.

Berekening:

$$e = \sqrt{2f - f^2} = 0,081\,991\,89$$

$$\tan \frac{1}{2} = \left(\tan \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right) \right) \left(\frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{\frac{1}{2}e}$$

$$r = k \left(\tan \frac{1}{2} \psi \right)^p$$

$$\theta = p \cdot (\lambda - \lambda_0)$$

$$x = 150\,000 + \Delta x + r \sin(\theta - \alpha)$$

$$y = 5400\,000 + \Delta y - r \cos(\theta - \alpha)$$

De inverse berekening is:

$$\tan(\theta - \alpha) = \frac{x - \Delta x - 150\,000}{-y + \Delta y + 5400\,000} = \frac{x'}{y'}$$

Hieruit volgt θ :

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\theta}{\rho}$$

$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$\tan \frac{1}{2} \psi = \left(\frac{r}{k} \right)^{\frac{1}{\rho}}$$

$$\tan \left(45^\circ - \frac{1}{2} \varphi \right) = \left(\tan \frac{1}{2} \psi \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{\frac{1}{2} e}$$

Met de laatste formule is φ te berekenen via iteratie. In het rechter lid wordt voor φ een benaderde waarde ingevuld, te beginnen met $\varphi_1 = (90^\circ - \psi)$. Als $(\varphi_{i+1} - \varphi_i) < 0'',0001$ of $3 \cdot 10^{-8}$ graad kan men stoppen. Dat is na 4 of 5 iteraties.

Controle:

$$x = 251\,763,204 \quad y = 153\,034,174$$

$$\varphi = 50^\circ,679\,5725 \quad \lambda = 5^\circ,807\,3703$$

De vergroting is:

$$m = \frac{\rho r \sqrt{1 - e^2 - \sin^2 \varphi}}{a \cos \varphi}$$

De snijcirkels van de kegel met de ellipsoïde zijn op de breedtes:

$$\varphi_1 = 49^\circ 50' \quad \text{en} \quad \varphi_2 = 51^\circ 10'$$

Daar is $m = 1$, tussen deze parallellen is $m < 1$ en er buiten is $m > 1$.

De minimale $m = 0,999\,9325$ voor $\varphi = 50^\circ 30'$; dat is een verkleining van $-6,75$ cm per km.

De maximale $m = 1,000\,085$ voor $\varphi = 51^\circ 30'$ en $\varphi = 49^\circ 30'$; dat is een vergroting van $+8,5$ cm per km.

9. Mercator-projectie

De conforme Mercator-projectie is een cilinderprojectie. De raakcirkel tussen cilinder en bol is de evenaar en in de projectie worden de meridianen verticale lijnen. Op de bol worden de vakjes van 1° breedte bij 1° lengte steeds smaller naar mate men dichterbij de pool komt. Dit komt omdat de meridianen naar elkaar toe lopen naar de polen (meridiaanconvergentie). In de Mercator-projectie lopen de meridianen evenwijdig, dus blijft de breedte van de $1^\circ \times 1^\circ$ vakjes gelijk. Om toch een conforme afbeelding te krijgen, moet de afstand tussen de parallelcirkels groter worden naar mate men dichterbij de pool komt. In formule wordt de afbeelding voor de bol:

$$x = R \cdot \lambda$$

$$y = R \cdot \operatorname{Intan}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi\right) = \frac{1}{2}R \cdot \ln\left(\frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}\right)$$

De vergroting m is:

$$m = \frac{dy}{Rd\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}$$

Een belangrijke eigenschap van de Mercator-projectie is, dat een lijn met een vaste koers (azimut) als een rechte lijn in de kaart wordt afgebeeld. Dit noemt men loxodroom. Voor de scheepvaart is dit belangrijk, vandaar dat de Mercator-projectie veel gebruikt wordt voor zeekaarten. De uitvinder van deze projectie, Mercator, was een Vlaming die in 1569 deze projectie reeds berekende. Door deze uitvinding is de navigatie en het berekenen van de koers van een schip om van A naar B te komen een stuk eenvoudiger geworden.

10. Transversale Mercator-projectie en UTM

De transversale Mercator-projectie is in principe hetzelfde als de normale Mercator-projectie, met dit verschil dat nu de cilinder raakt aan een meridiaan. Het geeft een goede weergave, dat wil zeggen met weinig vervorming, in een strook van een paar graden aan weerszijden van de meridiaan. Door deze draaiing van de cilinder worden de projectieformules echter veel ingewikkelder dan bij de normale Mercator-projectie, omdat nu de meridiaan en parallellen niet meer samen vallen met de x- en y-coördinaten in het vlak. Als men bovendien uitgaat van de ellipsoïde, dan kunnen de projectieformules alleen nog geschreven worden als reeksontwikkelingen.

De TM-projectie wordt veel toegepast, onder andere in Duitsland en Scandinavië onder de naam *Gauss-Krüger-projectie*. Internationaal wordt de projectie toegepast om de hele wereld op een uniforme wijze in kaart te brengen onder de naam *UTM-projectie*.

De UTM-projectie

Na de Tweede Wereldoorlog is door de Amerikanen, oorspronkelijk voor militaire doeleinden, een projectiesysteem voor de gehele wereld ontwikkeld, dat gebaseerd is op de TM-projectie. Dit wordt de Universele TM-projectie (UTM) genoemd. De projectie is gebaseerd op de ellipsoïde van Hayford. De wereld is verdeeld in stroken langs de meridianen van 6° breedte. Deze zones worden genummerd, beginnende bij meridiaan van 180° westerlengte:

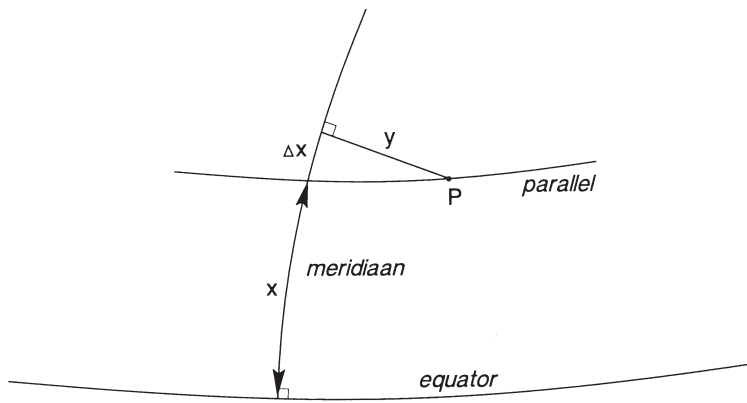
- zone 1: 180° – 174° westerlengte
- zone 2: 174° – 168° westerlengte
- enz.
- zone 31: 0° – 6° oosterlengte
- zone 32: 6° – 12° oosterlengte

Nederland ligt dus voor het grootste deel in zone 31 en het oosten van het land in zone 32. Om geen plotselinge sprong in de coördinaten te krijgen bij de zonerand, is er een overlapzone, zodat punten die eigenlijk in zone 32 liggen ook nog in zone 31 berekend kunnen worden, zodat we Nederland geheel in zone 31 kunnen berekenen. De noord-coördinaten worden gerekend vanaf de equator (Northing) en de oost-coördinaten vanaf de middenmeridiaan (Easting), waarbij de middenmeridiaan de Easting-coördinaat van 500 000 m wordt gegeven, zodat er geen negatieve getallen optreden.

Op het zuidelijk halfrond telt men bij de Northing ook een constante op (10 000 000 m) ter voorkoming van negatieve getallen.

Verder is in noord-zuid richting een verdeling gemaakt in zones van 8° breedteverschil, tussen 80° ZB en 80° NB. Deze zones worden aangeduid door de letters C tot en met X met uitzondering van I en O. Zo ligt Nederland in zone 31 U en 32 U. Voor militaire toepassing is bovendien een blokdeling gemaakt van blokken van 100 x 100 km² die door letters worden aangeduid. Voor geodetische toepassingen is dit echter niet van belang.

Berekening van UTM-coördinaten



Figuur 7.

- φ = breedte,
- λ = lengte,
- λ_0 = centrale meridiaan,
- x = meridiaanboog-lengte van equator tot breedte φ ,
- y = afstand van P tot centrale meridiaan langs de geodetische lijn (niet langs de parallel),
- Δx = booglengte langs centrale meridiaan tussen parallel en geodetische lijn door P,
- N = Northing in UTM,
- E = Easting in UTM,
- k = schaalfactor op centrale meridiaan.

Voor de UTM-projectie werd vroeger uitgegaan van coördinaten van de Europese verefening 1950, ED50, in combinatie met de internationale ellipsoïde 1930 (Hayford-ellipsoïde). Tegenwoordig wordt UTM toegepast op WGS84-coördinaten met de ellipsoïde die in tabel 2 gegeven is.

De maten van de ellipsoïden van beide systemen zijn:

	ED50	WGS84
a	6378388,00 m	6378137,00 m
e ²	0,00672267002	0,00669438000

Tabel 9.

Waarschuwing: Bij het gebruik van UTM-coördinaten moet men altijd goed aangeven op welk coördinaatsysteem ze gebaseerd zijn, ED50 of WGS84. Het verschil tussen beide systemen is ongeveer 200 m en een vergissing kan grote gevolgen hebben. In het verleden is al eens een oliebooring op de Noordzee naast de juiste plaats gezet door het gebruik van verkeerde coördinaten.

Northing en Easting uit breedte, lengte

De UTM-coördinaten worden berekend met:

$$\begin{aligned} \text{Northing: } N &= k(x + \Delta x) && \text{(meter)} \\ \text{Easting: } E &= ky + 500\,000 && \text{(meter)} \end{aligned} \quad (21)$$

De schaalfactor is:

$$k = 0,99960000$$

De meridiaanboog x is:

$$x = a(1 - e^2) \cdot (A\varphi_{rad} - B\sin 2\varphi + C\sin 4\varphi - D\sin 6\varphi \dots) \quad (22)$$

met:

$$A = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \dots$$

$$B = \frac{3}{8}e^2 + \frac{15}{32}e^4 + \frac{525}{1024}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \dots$$

$$C = \frac{15}{256}e^4 + \frac{105}{1024}e^6 + \frac{2205}{16384}e^8 + \dots$$

$$D = \frac{35}{3072}e^6 + \frac{105}{4096}e^8 + \dots$$

	ED50	WGS84
A	$100\ 507\ 398\ 882 \cdot 10^{-11}$	$100\ 505\ 250\ 179 \cdot 10^{-11}$
B	$254\ 234\ 295 \cdot 10^{-11}$	$253\ 155\ 430 \cdot 10^{-11}$
C	$267\ 953 \cdot 10^{-11}$	$265\ 689 \cdot 10^{-11}$
D	$351 \cdot 10^{-11}$	$347 \cdot 10^{-11}$

Tabel 10.

De Δx en y zijn afhankelijk van het lengteverschil van het punt tot de centrale meridiaan:

$$\Delta\lambda = (\lambda - \lambda_0) \cdot \cos\varphi \quad (\text{in radialen}) \quad t = \tan\varphi \quad n^2 = \frac{e^2 \cos^2\varphi}{1 - e^2}$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}} \quad (\text{in hoofdstuk 2 aangeduid met } N)$$

We krijgen:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{1}{2} \Delta\lambda^2 \cdot R \cdot t \cdot (1 + p\Delta\lambda^2 + q\Delta\lambda^4) \\ y &= \Delta\lambda \cdot R (1 + r\Delta\lambda^2 + s\Delta\lambda^4 + u\Delta\lambda^6) \end{aligned} \quad (23)$$

met:

$$p = \frac{1}{12} (5 - t^2 + 9n^2 + 4n^4)$$

$$q = \frac{1}{360} (61 - 58t^2 + t^4 + 270n^2 - 330t^2n^2)$$

$$r = \frac{1}{6} (1 - t^2 + n^2)$$

$$s = \frac{1}{120} (5 - 18t^2 + t^4 + 14n^2 - 58t^2n^2)$$

$$u = \frac{1}{5040} (61 - 479t^2 + 179t^4 - t^6)$$

Met (21), (22) en (23) kunnen de Northing en Easting worden berekend.

Breedte en lengte uit Northing en Easting

Bereken met (21): $(x + \Delta x)$ en y .

Met (22) kan $(\varphi + \Delta\varphi)$ worden berekend als functie van $(x + \Delta x)$.

Stel: $\bar{\varphi} = \varphi + \Delta\varphi$

Uit (22) volgt:

$$\bar{\varphi}_{rad} = \frac{x + \Delta x}{a(1 - e^2)} \cdot \frac{1}{A} + \frac{B}{A} \sin 2\bar{\varphi} - \frac{C}{A} \sin 4\bar{\varphi} + \frac{D}{A} \sin 6\bar{\varphi} \quad (24)$$

$\bar{\varphi}$ wordt berekend door opeenvolgende benaderingen. Neem voor $\bar{\varphi}$ eerst een benaderde waarde in de rechterkant van (24) en bereken een betere benadering van $\bar{\varphi}$. Na 4 iteraties is een goede waarde van $\bar{\varphi}$ verkregen.

Stel:

$$t = \tan \bar{\varphi} \quad n^2 = \frac{e^2 \cos^2 \bar{\varphi}}{1 - e^2} \quad R = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \bar{\varphi}}} \quad \bar{y} = \frac{y}{R} = \frac{E - 500000}{kR}$$

We krijgen:

$$\Delta \varphi_{rad} = \frac{1}{2} \bar{y}^{-2} \cdot t \cdot (1 + n^2) (1 - \bar{p} \bar{y}^{-2} + \bar{q} \bar{y}^{-4})$$

$$\Delta \lambda_{rad} = \bar{y} \frac{1}{\cos \bar{\varphi}} (1 - \bar{r} \bar{y}^{-2} + \bar{s} \bar{y}^{-4} - \bar{u} \bar{y}^{-6}) \quad (25)$$

$$\varphi = \bar{\varphi} - \Delta \varphi$$

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta \lambda$$

met:

$$\bar{p} = \frac{1}{12} (5 + 3t^2 + n^2 - 9t^2 n^2)$$

$$\bar{q} = \frac{1}{360} (61 + 90t^2 + 45t^4 + 107n^2 - 162t^2 n^2 - 45t^4 n^2)$$

$$\bar{r} = \frac{1}{6} (1 + 2t^2 + n^2)$$

$$\bar{s} = \frac{1}{120} (5 + 28t^2 + 24t^4 + 6n^2 + 8t^2 n^2)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{5040} (61 + 662t^2 + 1320t^4 + 720t^6)$$

Controle:

$$\varphi = 52^\circ,123\,4500 \quad \lambda = 5^\circ,123\,4500$$

$$\text{ED50: } N = 5777\,015,88 \quad E = 645\,373,51$$

$$\text{WGS84: } N = 5776\,895,50 \quad E = 645\,366,50$$

Vergroting

De vergroting (schaal) op de centrale meridiaan is $k = 0,9996$. Buiten de centrale meridiaan is de vergroting afhankelijk van de afstand $\Delta\lambda$ (in radialen) of de Easting E :

$$m = k \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi (1 + n^2) \Delta\lambda^2 + \frac{1}{24} \cos^4 \varphi (5 - 4t^2 + 14n^2 - 28t^2n^2) \Delta\lambda^4 \right)$$

of in Easting $E' = E - 500\,000$:

$$m = k \left(1 + \frac{1}{2} (1 + n^2) \left(\frac{E'}{kR} \right)^2 + \frac{1}{24} (1 + 6n^2 - 24n^2t^2) \left(\frac{E'}{kR} \right)^4 \right)$$

Voor een lange lijn met als eindpunten E_1 en E_2 is m variabel langs de lijn. In dat geval kunnen we in de formule E'^2 vervangen door:

$$E'^2 = \frac{1}{3} (E_1'^2 + E_1'E_2' + E_2'^2)$$

Een afstand in de kaartprojectie is m maal de afstand, zoals die op de ellipsoïde gemeten is:

$$S_{\text{projectie}} = m \cdot S_{\text{ellipsoïde}}$$

Meridiaanconvergentie

Dit is het naar elkaar toelopen van de meridianen, oftewel de hoek tussen het kaartnoorden en het echte noorden. γ en $\Delta\lambda$ in radialen.

$$\gamma = \Delta\lambda \sin \varphi + \frac{\Delta\lambda^3}{3} \sin \varphi \cos^2 \varphi (1 + 3n^2 + 2n^4) + \frac{\Delta\lambda^5}{15} \sin \varphi \cos^4 \varphi (2 - t^2) \text{ rad}$$

of

$$\gamma = \tan \varphi \left(\left(\frac{E'}{kR} \right) + \frac{1}{6} (1 + t^2 + 5n^2 + 4n^4) \left(\frac{E'}{kR} \right)^3 + \frac{1}{120} (1 + 10t^2 + 9t^4) \left(\frac{E'}{kR} \right)^5 \right) \text{ rad}$$

Transformatie van UTM-ED50 naar UTM-WGS84

Om de transformatie van UTM-ED50 naar UTM-WGS84 te berekenen moet rekening gehouden worden met de 'datum shift' van ED50 naar WGD84. Daar beide projecties conform zijn, is een conforme reeksontwikkeling berekend waarmee men de UTM-ED50-coördinaten direct kan transformeren naar UTM-WGS84 en vice versa. Deze reeksontwikkeling is beschreven in hoofdstuk 13.

De formules luiden als volgt:

$$\begin{aligned}
 E &= \text{Easting} & N &= \text{Northing} \\
 E_{WGS} &= E_{ED50} - \Delta E & N_{WGS} &= N_{ED50} - \Delta N \\
 E_{ED50} &= E_{WGS} + \Delta E & N_{ED50} &= N_{WGS} + \Delta N \\
 \\
 \Delta E &= E_0 + A \cdot P - B \cdot Q + C \cdot R - D \cdot S + E \cdot T - F \cdot U + G \cdot V - H \cdot W \\
 \Delta N &= N_0 + B \cdot P + A \cdot Q + D \cdot R + C \cdot S + F \cdot T + E \cdot U + H \cdot V + G \cdot W
 \end{aligned}$$

Met:

$$\begin{aligned}
 \text{voor zone 31:} & \quad P = (E - 700\,000) \cdot 10^{-5} & Q &= (N - 5800\,000) \cdot 10^{-5} \\
 \text{voor zone 32:} & \quad P = (E - 350\,000) \cdot 10^{-5} & Q &= (N - 5800\,000) \cdot 10^{-5} \\
 \text{voor beide zones:} & \quad R = P \cdot P - Q \cdot Q & S &= P \cdot Q + Q \cdot P \\
 & \quad T = P \cdot R - Q \cdot S & U &= P \cdot S + Q \cdot R \\
 & \quad V = P \cdot T - Q \cdot U & W &= P \cdot U + Q \cdot T
 \end{aligned}$$

De constanten zijn (eenheid meters):

	zone 31	zone 32
E_0	91,9312	79,9367
N_0	210,3903	203,4271
A	0,9773	1,4001
B	0,3627	0,2798
C	0,2300	0,6724
D	-0,0713	0,0798
E	0,1597	0,3325
F	0,0654	0,0732
G	0,0712	0,0762
H	-0,0220	-0,0055

Tabel 11.

Deze constanten zijn berekend uit een kleinstekwadratenvereffening van 25 punten die gegeven zijn in beide systemen. De precisie van de transformatie is ongeveer 10 cm binnen Nederland.

Controle:

zone 31:	ED50:	$E = 650\,000,000$	$N = 5750\,000,000$
	WGS84:	$E = 649\,908,302$	$N = 5749\,790,183$
zone 32:	ED50:	$E = 300\,000,000$	$N = 5750\,000,000$
	WGS84:	$E = 299\,920,581$	$N = 5749\,797,140$

11. Gauss-Krüger-projectie in Duitsland

In Duitsland wordt de Gauss-Krüger-projectie gebruikt. Dit is een transversale Mercator-projectie, analoog aan de UTM-projectie. De ellipsoïde die gebruikt wordt is de Bessel-ellipsoïde met maten:

$$a = 6377\ 397,155 \quad f = 1 : 299,152\ 8128 \quad e^2 = 0,006\ 674\ 372\ 232$$

De middenmeridianen van de zones zijn: $3^\circ, 6^\circ, 9^\circ, 12^\circ, 15^\circ$

Deze zones worden genummerd: 1, 2, 3, 4, 5

In het grensgebied tussen de zones wordt 1° overlap genomen, dat wil zeggen dat de punten in het overlapgebied in beide zones worden berekend. De formules voor de berekening van de coördinaten zijn hetzelfde als van de UTM-projectie, alleen de constanten zijn anders daar er een andere ellipsoïde gebruikt wordt.

De oost-coördinaat van de middenmeridiaan wordt 500 000,00 gekozen, net als bij UTM. Voor de oost-coördinaat wordt echter nog het nummer van de zone gezet, dus bijvoorbeeld 2567 890,00 betekent dat het punt in de zone 2 ligt en 67 890 meter oost van de 6° meridiaan. De noord-coördinaat wordt gerekend vanaf de equator. De schaalfactor k op de middenmeridiaan is: $k = 1,000\ 000$, dus anders dan bij UTM. In het Duitse spraakgebruik wordt de oost-coördinaat 'Rechtswert' (R) genoemd en de noord-coördinaat 'Hochwert' (H).

Met de formules beschreven onder de UTM-projectie kan men Rechts- en Hochwert omrekenen naar geografische lengte en breedte op de Bessel-ellipsoïde. Voor het 1e-orde driehoeksnet in Duitsland zijn voor de driehoekspunten zowel Gauss-Krüger-coördinaten als UTM-coördinaten berekend in ED50 en ED87 (zie: *Technische Anleitung TA-VERM-10*). Om ook andere punten om te rekenen van Gauss-Krüger naar UTM gebruikt men een lineaire interpolatieformule, ook wel affine transformatie genoemd, binnen elke driehoek van het 1e-orde net (zie: Schödlbauer). De Gauss-Krüger-coördinaten moeten dan berekend zijn in dezelfde zone als de UTM-coördinaten. Als dat niet het geval is moeten de Gauss-Krüger-coördinaten nog naar de juiste zone omgerekend worden. Om de zo verkregen Duitse UTM-coördinaten om te rekenen naar het RD-systeem kan men de transformatie UTM naar RD toepassen. De formules zijn gegeven in hoofdstuk 13. De Duitse punten nabij de Nederlandse grens liggen in zone 32.

12. Transformatie van RD naar WGS84 en ETRS89

WGS84 en ETRS89

Het Global Positioning System (GPS) geeft coördinaten ten opzichte van het WGS84-systeem. Dit systeem is internationaal vastgelegd aan een aantal punten verspreid over de aarde en wordt bijgehouden door het Amerikaanse National Imagery and Mapping Agency (NIMA). Daar de continenten langzaam ten opzichte van elkaar verschuiven veranderen de WGS-coördinaten van Europese punten in de loop van de tijd. Dit is in de praktijk erg hinderlijk en daarom heeft men een Europees coördinatensysteem geïntroduceerd dat vast zit aan het Europese continent, het European Terrestrial Reference System 1989 (ETRS89). De coördinaten in ETRS veranderen dus niet in de loop van de tijd.

In de praktijk meet men meestal de relatieve ligging van punten ten opzichte van elkaar, dus differentiële GPS. In dat geval maakt het niet uit of men WGS-coördinaten of ETRS-coördinaten gebruikt, omdat WGS-verschillen in coördinaten gelijk zijn aan de ETRS-verschillen.

Ook de RD-coördinaten veranderen niet in de tijd omdat ze zijn vastgelegd aan Nederlandse punten. Daardoor is het mogelijk om een vaste transformatie te definiëren tussen ETRS89 en het RD-systeem. Deze transformatie wordt RDNAPTRANS genoemd en bepaalt in feite de definitie van het RD-systeem. Voor het gebruik van de geregistreerde naam 'RDNAPTRANS' verlenen het Kadaster en de Adviesdienst Geo-informatie en ICT van Rijkswaterstaat toestemming als de transformatie correct is toegepast, dat wil zeggen inclusief de hieronder beschreven kleine correcties, de juiste NAP-hoogten en het bijbehorende geoidemodel (zie: *Het stelsel van de Rijksdriehoeksmeting en het ETRS89*, uitgave van het Kadaster september 2000 en *Geodesia 2000-9*, pagina 395-403).

Transformatie van RD naar ETRS89 en vice versa

De transformatie van RD naar ETRS89 bestaat uit twee stappen:

1. Een 3D-gelijkvormigheidstransformatie volgens formule (10). Deze transformatie wordt hierna besproken.
2. Een kleine correctie (maximaal 25 cm) die veroorzaakt wordt doordat het RD-stelsel niet helemaal gelijkvormig is aan het ETRS-stelsel.

Deze correctie is berekend door de Rijksdriehoeksmeting voor 418 RD-punten. Een kaart van deze correcties is gepubliceerd door J. van Buren van de RD in Geodesia 1998-7/8, pag. 333. Het blijkt dat de correcties geleidelijk verlopen, zodat voor differentiële GPS de correctieverschillen hooguit 10 cm zijn op 20 km afstand. Als men deze correctie verwaarloost en alleen de 3D-gelijkvormigheidstransformatie toepast, krijgt men benaderde RD-coördinaten die men pseudo RD-coördinaten noemt. Ze verschillen maximaal 25 cm van de echte RD-coördinaten in Groningen en Zuid-Limburg, maar veel minder in het midden van Nederland.

Men kan ook een schatting van de correctie maken aan de hand van het kaartje uit Geodesia. Dit geeft al een betere benadering van de echte RD-coördinaten. Voor de exacte berekening van de correctie heeft de RD een programma geschreven dat in sommige programmapakketten is in gebouwd.

De 3D-gelijkvormigheidstransformatie

In Nederland is het ETRS89-stelsel vastgelegd aan 5 AGRS-punten (Actief GPS Referentie Systeem) waarvan de coördinaten voortdurend worden gecontroleerd. Bij gebruik van differentiële GPS vindt men dus ETRS89-coördinaten (breedte, lengte en hoogte) van de gemeten punten, die men kan omzetten in 3D-coördinaten (x, y, z) van het RD-stelsel. De schaal- en rotatieparameters in formule (10) zijn bepaald uit een kleinstekwadratenvereffening van beide netten. Formule (10) luidt in dit geval:

$$\mathbf{x}_{RD} = \mathbf{x}_{ETRS} + \mathbf{T}_0 + \mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_{ETRS}$$

of:

$$\mathbf{x}_{ETRS} = \mathbf{x}_{RD} - \mathbf{T}_0 - \mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_{RD}$$

De hieronder aangegeven constanten van de transformatieformules zijn vastgesteld in samenwerking tussen het Kadaster, de Rijksdriehoeksmeting, de Adviesdienst Geoinformatie en ICT van Rijkswaterstaat en de voormalige faculteit Geodesie van de TU Delft (zie ook: *H.T.W. 1996*).

Als nulpunt is gekozen het nulpunt van het RD-net, Amersfoort. In het RD-systeem zijn de coördinaten van Amersfoort:

$$\varphi = 52^{\circ},156\ 160\ 556, \quad \lambda = 5^{\circ},387\ 638\ 889$$

De hoogte van het nulpunt boven de Bessel-ellipsoïde kunnen we vrij kiezen en kiezen we nul, dus nul: $h_0 = 0$.

Uit (φ, λ, h) zijn de driedimensionale coördinaten van het nulpunt ten opzichte van de Bessel-ellipsoïde te berekenen:

$$x_{0_{RD}} = 3903\ 453,148 \quad y_{0_{RD}} = 368\ 135,313 \quad z_{0_{RD}} = 5012\ 970,306$$

Van dit zelfde punt zijn de coördinaten in ETRS89:

$$x_{0_{ETRS}} = 3904\,046,180 \quad y_{0_{ETRS}} = 368\,161,313 \quad z_{0_{ETRS}} = 5013\,449,047$$

De translatievector $T_0 = x_{0_{RD}} - x_{0_{WGS}}$ is dus voor Amersfoort:

$$T_{X_0} = -593,029 \quad T_{Y_0} = -26,004 \quad T_{Z_0} = -478,753$$

De rotatie- en schaalconstanten α , β , γ , δ zijn berekend door het Kadaster. Voor de berekening is een kleinstekwadratenvereffening uitgevoerd zoals beschreven is in hoofdstuk 4. Daarvoor zijn punten gebruikt waarvan de coördinaten zowel in RD als in WGS84 bekend waren. Het resultaat is:

$$\begin{aligned} \alpha &= -1,9725 \cdot 10^{-6} \text{ rad} & \beta &= +1,7004 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \\ \gamma &= -9,0677 \cdot 10^{-6} \text{ rad} & \delta &= -4,0812 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Voor de berekening van driedimensionale coördinaten moet de geoidhoogte (N) die berekend is door De Min (figuur 8) opgeteld worden bij de gewaterpaste hoogte boven NAP (H), om de geometrische hoogte boven de ellipsoïde (h) te verkrijgen, dus:

$$h = H + N$$

Indien men echter niet geïnteresseerd is in de hoogte, maar alleen horizontale RD-coördinaten wil berekenen uit GPS-waarnemingen, dan kan men de geoidhoogte verwaarlozen. In plaats van het geoidkaartje van figuur 8 te gebruiken kan men ook een programma verkrijgen voor de berekening van de geoidhoogten bij de Adviesdienst Geo-informatie en ICT van Rijkswaterstaat in Delft.

Controle: Station Delft, Geodesie

RD:	$X = 86\,346,784$	$Y = 444\,659,972$	$H = 30,809$ (NAP)
Geoïde:	$N = -0,113$	$h = H + N = 30,696$	
Bessel:	$\varphi = 51,987\,053\,833$	$\lambda = 4,388054\,251$	$h = 30,696$
Bessel:	$x = 3924\,096,851$	$y = 301\,119,821$	$z = 5001\,429,896$
ETRS89:	$x = 3924\,689,340$	$y = 301\,145,338$	$z = 5001\,908,687$
ETRS89:	$\varphi = 51,986\,087\,342$	$\lambda = 4,387\,764\,732$	$h = 74,312$

Geoidhoogte ten opzichte van ETRS89: $N = h - H = 74,312 - 30,809 = 43,503$ m

De formules hebben een precisie van 1 cm. Het programma Coördinaat Calculator, dat bruikbaar is voor coördinaatberekeningen en geoidhoogten, is verkrijgbaar bij de Adviesdienst Geo-informatie en ICT van Rijkswaterstaat in Delft. Informatie over de coördinaatsystemen RD, NAP en ETRS89 en hun onderlinge transformaties is te vinden op internet bij www.rdnapi.nl. Handige benaderingsformules van de 3D-transformatie

zijn beschreven door F. Schreutelkamp en G. Strang van Hees in Geodesia 2001-2, pagina 64-69.

Differentiële GPS

Bij gebruik van GPS worden de coördinaten berekend in het WGS84-systeem. Een van de belangrijkste foutenbronnen van GPS is de 'troposfeercorrectie'. Deze is afhankelijk van de temperatuur, luchtdruk en vochtigheid van de onderste 10 km laag van de atmosfeer. Om deze fout te verminderen wordt differentiële GPS (DGPS) gemeten, dat wil zeggen verschildmeting tussen punten die niet meer dan enige tientallen km van elkaar liggen. De troposfeercorrecties voor beide punten zijn dan ongeveer gelijk.

DGPS heeft echter ook een voordeel voor de transformatie van WGS84 naar RD. Als we twee punten A en B bekijken en voor beide punten de hiervoor beschreven transformatie toepassen, krijgen we:

$$(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B)_{RD} = (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B)_{WGS} + \mathbf{R}(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B)_{WGS}$$

en

$$(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B)_{WGS} = (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B)_{RD} - \mathbf{R}(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B)_{RD}$$

We zien hieraan dat de translatievector \mathbf{T}_0 er uit valt en dus ook de onnauwkeurigheid in deze vector geen invloed meer heeft. Bovendien zijn coördinaatverschillen in WGS84 gelijk aan die in ETRS89.

Ten tweede wordt de rotatiematrix \mathbf{R} vermenigvuldigd met een kleine vector $(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B)$, waardoor de onnauwkeurigheid in \mathbf{R} gereduceerd wordt als de afstand $(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B)$ niet erg groot is.

Concluderend kunnen we zeggen dat DGPS erg gunstig is voor de precisie van de transformatie van WGS84-coördinaten naar RD-coördinaten.

Benaderde transformatie

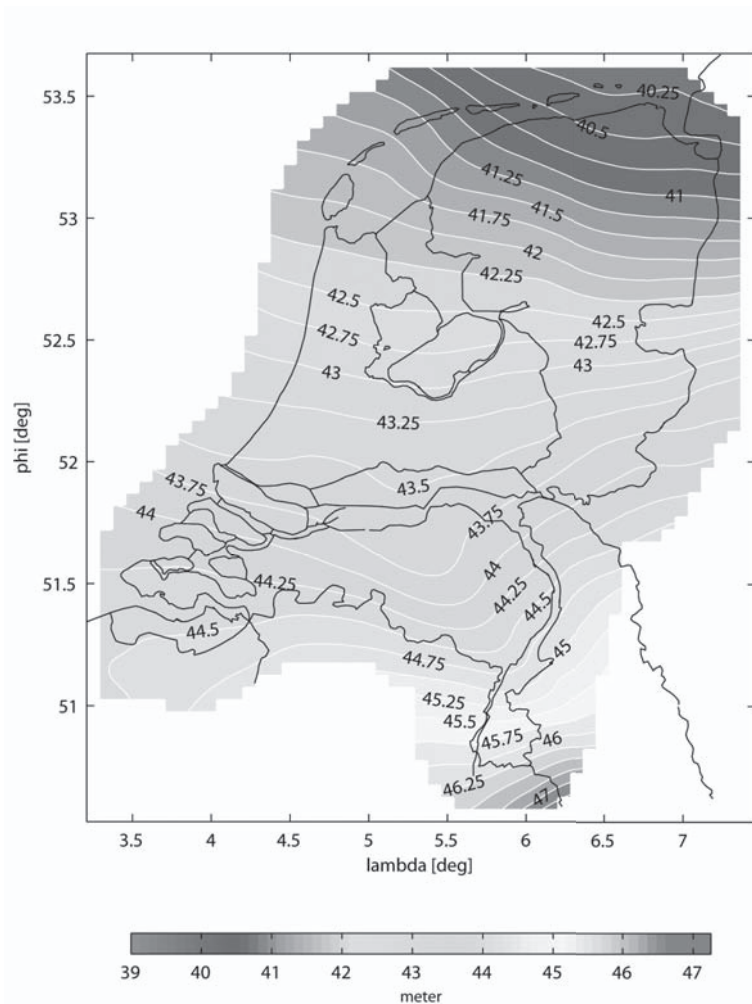
De breedte- en lengteverschillen tussen RD (Bessel-ellipsoïde) en WGS84 kunnen benaderd worden met een eenvoudige lineaire transformatie. Deze formule heeft een precisie van ongeveer $5 \cdot 10^{-6}$ graad in lengte en breedte; dit komt overeen met een horizontale afstand van 50 cm. In het midden van Nederland is het wat beter, maar aan de rand slechter. φ en λ zijn in graden. De formules zijn berekend door dr.ir. E.J. de Min.

$$\varphi_{WGS} - \varphi_{RD} = (-96,862 - 11,714(\varphi - 52,0) - 0,125(\lambda - 5,0)) \cdot 10^{-5} \text{graad}$$

$$\lambda_{WGS} - \lambda_{RD} = (-37,902 + 0,329(\varphi - 52,0) - 4,667(\lambda - 5,0)) \cdot 10^{-5} \text{graad}$$

Literatuur

BRUIJNE, A. DE, BUREN, J. VAN, KÖSTERS, A., MAREL, H. VAN DER, De geodetische referentiestelsels van Nederland. Definitie en vastlegging van ETRS89, RD en NAP en hun onderlinge relaties, NCG, Delft, 2005.



Figuur 8. Geoïde van Nederland NLGEO2004 berekend door de Adviesdienst Geo-informatie en ICT van Rijkswaterstaat.

13. Transformatie van RD naar ED50 (UTM) en vice versa

Voor de Tweede Wereldoorlog had ieder land zijn eigen driehoeksnet berekend op een eigen ellipsoïde en in een eigen projectie. Om voor Europa een eenduidig systeem van coördinaten te krijgen zijn de driehoeksmetingen van de landen verzameld en opnieuw vereffend op de internationale ellipsoïde van Hayford. Deze ellipsoidische coördinaten zijn getransformeerd naar platte-vlak-coördinaten volgens de UTM-projectie. Deze coördinaten staan bekend als coördinaten in het European Datum 1950 (ED50). Deze vereffening is gedaan met primitieve rekenmiddelen, waardoor deze coördinaten naar onze huidige inzichten niet erg nauwkeurig waren. Vooral rondom de Noordzee waren er verschillen van vele meters tussen coördinaten van Engeland, Noorwegen, Denemarken en Nederland. In de jaren 1970-1990 zijn herhaalde malen hervereffeningen van het Europese net uitgevoerd door een speciale commissie RETRIG. Hierbij werden vele nieuwe metingen betrokken met satellieten (Doppler en GPS). De meest recente coördinaatberekening staat bekend als ED87. De verschillen tussen ED50 en ED87 lopen op tot 5 meter. Er bestaan transformatieformules om ED50 naar ED87 om te rekenen (zie hoofdstuk 15). Hoewel de ED50-coördinaten niet zo nauwkeurig zijn, zijn ze toch juridisch van groot belang. Bij de opkomst van de olie- en gasexploitatie op de Noordzee is in verschillende wetten vastgelegd dat de posities van de concessiegrenzen en platforms moeten worden vastgelegd in ED50-coördinaten. Dit kan soms problemen geven als men de metingen aansluit op Engelse, Noorse of Nederlandse punten.

De omrekening van Nederlandse RD-coördinaten naar ED50, ook wel UTM-coördinaten genoemd, gaat via een reeksontwikkeling. Omdat beide netten uit verschillende vereffeningen komen, kunnen ze niet exact in elkaar omgerekend worden.

De formule op de volgende bladzijde is een vierdegraads conforme transformatie, die zo goed mogelijk passend is gemaakt. De restverschillen zijn in de orde van enige centimeters tot decimeters.

De voormalige Topografische Dienst heeft een iets andere (meer ingewikkelde) formule afgeleid voor de transformatie, maar deze geeft dezelfde resultaten als de formule op de volgende bladzijde (zie: NGT Geodesia, oktober 1985).

Achtergrond van de formules

Zowel de stereografische projectie (RD-systeem) als de UTM zijn conforme projecties. Het moet dus mogelijk zijn om RD-coördinaten te transformeren naar UTM via een

conforme transformatie in het platte vlak. In het algemeen kan een conforme transformatie worden beschreven met een complexe functie ($i = \sqrt{-1}$):

$$E + iN = f(X + iY) \quad E = \text{Easting} \quad N = \text{Northing}$$

Deze functie kunnen we als Taylor-reeks schrijven:

$$(E + iN) = (E_0 + iN_0) + (A + iB)(X + iY) + (C + iD)(X + iY)^2 + (E + iF)(X + iY)^3 + (G + iH)(X + iY)^4$$

Deze reeks kunnen we iets handiger schrijven door van (E, N) en (X, Y) de coördinaten van het nulpunt Amersfoort af te trekken en de getallen te verkleinen door te delen door 10^5 . De nieuwe coördinaten noemen we x en y . Vervolgens wordt uitgerekend:

$$\begin{aligned} x + iy &= P + iQ & (x + iy)^2 &= R + iS \\ (x + iy)^3 &= T + iU & (x + iy)^4 &= V + iW \end{aligned}$$

Uitschrijven van de reeks in het reële en imaginaire deel geeft de formules voor de berekening.

De coëfficiënten A, B, C, D, E, F, G, H moeten nog bepaald worden. Uit 14 punten waarvan de coördinaten in RD en in UTM bekend waren, is via een kleinste kwadratevereffening de waarde van de coëfficiënten zo goed mogelijk bepaald (zie volgende pagina).

Benaderde formules

De geografische breedte (φ) en lengte (λ) zijn niet veel verschillend in RD of in ED50. Daarom kunnen deze verschillen benaderd worden door een eenvoudige formule die handig is om RD in ED50 om te rekenen en vice versa. φ en λ zijn in graden uitgedrukt. De precisie van de formule is ongeveer $4 \text{ à } 10 \cdot 10^{-6}$ graad, dat is 40 à 100 cm in horizontale afstand. In het midden van Nederland iets beter, maar aan de randen slechter.

$$\varphi_{\text{ED50}} - \varphi_{\text{RD}} = (-18,010 - 14,723(\varphi - 52,0) - 1,029(\lambda - 5,0)) \cdot 10^{-5} \text{ graad}$$

$$\lambda_{\text{ED50}} - \lambda_{\text{RD}} = (+89,120 + 2,708(\varphi - 52,0) - 17,176(\lambda - 5,0)) \cdot 10^{-5} \text{ graad}$$

Transformatie van X, Y (RD) naar Easting, Northing (UTM) van ED50

$$E = E_0 + (X - 155\,000) + \Delta X$$

$$N = N_0 + (Y - 463\,000) + \Delta Y$$

$$\Delta X = A \cdot P - B \cdot Q + C \cdot R - D \cdot S + E \cdot T - F \cdot U + G \cdot V - H \cdot W$$

$$\Delta Y = B \cdot P + A \cdot Q + D \cdot R + C \cdot S + F \cdot T + E \cdot U + H \cdot V + G \cdot W$$

$$x = (X - 155\,000) \cdot 10^{-5} \qquad y = (Y - 463\,000) \cdot 10^{-5}$$

$$P = x \qquad Q = y$$

$$R = P \cdot x - Q \cdot y \qquad S = P \cdot y + Q \cdot x$$

$$T = R \cdot x - S \cdot y \qquad U = R \cdot y + S \cdot x$$

$$V = T \cdot x - U \cdot y \qquad W = T \cdot y + U \cdot x$$

	zone 31	zone 32
E_0	663 395,607	252 957,480
N_0	5781 194,380	5784 656,250
A	-51,681	-79,499
B	+3290,525	-4981,899
C	+20,172	-30,058
D	+1,133	+2,819
E	+2,075	+2,075
F	+0,251	-0,266
G	+0,075	+0,072
H	-0,012	-0,020

Tabel 12.

Controle:

RD:	$X = 200\,000,00$	$Y = 500\,000,00$
zone 31:	$E = 707\,155,557$	$N = 5819\,663,128$
zone 32:	$E = 299\,761,943$	$N = 5819\,375,548$

Transformatie van Easting, Northing (UTM) naar X, Y (RD) van ED50

$$X = E - E_0 + 155\,000 - \Delta X$$

$$Y = N - N_0 + 463\,000 - \Delta Y$$

$$\Delta X = A \cdot P - B \cdot Q + C \cdot R - D \cdot S + E \cdot T - F \cdot U + G \cdot V - H \cdot W$$

$$\Delta Y = B \cdot P + A \cdot Q + D \cdot R + C \cdot S + F \cdot T + E \cdot U + H \cdot V + G \cdot W$$

$$x = (E - E_0) \cdot 10^{-5} \qquad y = (N - N_0) \cdot 10^{-5}$$

$$P = x \qquad Q = y$$

$$R = P \cdot x - Q \cdot y \qquad S = P \cdot y + Q \cdot x$$

$$T = R \cdot x - S \cdot y \qquad U = R \cdot y + S \cdot x$$

$$V = T \cdot x - U \cdot y \qquad W = T \cdot y + U \cdot x$$

	zone 31	zone 32
E_0	663 395,607	252 957,480
N_0	5781 194,380	5784 656,250
A	+56,619	+168,607
B	+3290,362	4977,456
C	+20,184	-30,103
D	-0,861	-1,686
E	+2,082	+2,065
F	-0,023	+0,149
G	+0,070	+0,078
H	-0,025	-0,001

Tabel 13.

Controle:

RD:	$X = 250\,000,00$	$Y = 400\,000,00$
zone 31 :	$E = 760\,430,790$	$N = 5721\,326,199$
zone 32:	$E = 344\,730,472$	$N = 5717\,007,924$

14. Transformatie van Belgische coördinaten naar ED50 (UTM) en ETRS89

Ook voor het Belgische coördinaatsysteem is een soortgelijke formule berekend om te transformeren naar UTM-coördinaten. De coëfficiënten zijn uiteraard anders dan in Nederland.

Transformatie van X, Y (Lambert) naar Easting, Northing (UTM) voor zone 31

$$E = X + \Delta X + 449\,681,702$$

$$N = Y + \Delta Y + 5460\,505,326$$

$$\Delta X = A \cdot P - B \cdot Q + C \cdot R - D \cdot S + E \cdot T - F \cdot U$$

$$\Delta Y = B \cdot P + A \cdot Q + D \cdot R + C \cdot S + F \cdot T + E \cdot U$$

$$x = X \cdot 10^{-5} \qquad y = Y \cdot 10^{-5}$$

$$P = x \qquad Q = y$$

$$R = P \cdot x - Q \cdot y \qquad S = P \cdot y + Q \cdot x$$

$$T = R \cdot x - S \cdot y \qquad U = R \cdot y + S \cdot x$$

$$A = -71,3747 \qquad B = +1858,8407$$

$$C = -5,4504 \qquad D = -16,9681$$

$$E = +4,0783 \qquad F = +0,2193$$

Transformatie van Easting, Northing (UTM) naar X, Y (Lambert) voor zone 31

$$X = E + \Delta X - 448\,933,793$$

$$Y = N + \Delta Y - 5461\,423,984$$

$$\Delta X = A \cdot P - B \cdot Q + C \cdot R - D \cdot S + E \cdot T - F \cdot U$$

$$\Delta Y = B \cdot P + A \cdot Q + D \cdot R + C \cdot S + F \cdot T + E \cdot U$$

$$X = (E - 500\,000) \cdot 10^{-5} \qquad y = (N - 5500\,000) \cdot 10^{-5}$$

$$P = x \qquad Q = y$$

$$R = P \cdot x - Q \cdot y \qquad S = P \cdot y + Q \cdot x$$

$$T = R \cdot x - S \cdot y \qquad U = R \cdot y + S \cdot x$$

$$\begin{array}{ll}
 A = +28,7827 & B = -1843,8236 \\
 C = +0,0864 & D = +11,9065 \\
 E = -4,0793 & F = +0,0809
 \end{array}$$

Controle:

$$\begin{array}{ll}
 X = 200\,000,00 & Y = 100\,000,00 \\
 E = 647\,737,377 & N = 5564\,124,227
 \end{array}$$

Transformatie van Belgische coördinaten naar ETRS89

Om Belgische Lambert-coördinaten om te rekenen naar ETRS89 moet men de coördinaten eerst omrekenen naar lengte en breedte (φ, λ) zoals beschreven in hoofdstuk 8. Vervolgens omrekenen naar 3D (x, y, z) met (6), waarbij men ook de hoogte boven de ellipsoïde moet kennen. Als men alleen geïnteresseerd is in horizontale coördinaten kan men $h = 0$ stellen. Vervolgens kan men de 3D-transformatie (9) toepassen met de volgende parameters:

$$\begin{array}{lll}
 T_x = -99,06 & T_y = +53,30 & T_z = -112,49 \\
 \alpha = -2,03 \cdot 10^{-6} & \beta = +4,02 \cdot 10^{-6} & \\
 \gamma = -9,14 \cdot 10^{-6} & \delta = -1,20 \cdot 10^{-6} &
 \end{array}$$

De berekende (x, y, z) coördinaten kan men omzetten in (φ, λ, h) met (7). Tenslotte kan men eventueel de UTM-projectie toepassen om kaartcoördinaten te verkrijgen.

15. Transformatie van ED50 naar ED87 voor de Noordzee

Voor de Noordzee is het belangrijk, dat de coördinaten van de punten langs de kusten in een eenduidig systeem zijn berekend. Het ED50-systeem vertoonde discrepanties van vele meters tussen de coördinaten van Noorse, Deense, Nederlandse en Engelse punten. In het ED87-systeem zijn deze fouten verbeterd. Om ED50-coördinaten om te rekenen naar ED87 is een vierdegraads veelterm berekend, die de correctie Δ in graden geeft voor de geografische breedte en lengte in graden (B.G. Harsson, 1990):

$$\Delta = \text{ED87} - \text{ED50}$$

$$\Delta = a_0 + a_1u + a_2v + a_3u^2 + a_4uv + a_5v^2 + a_6u^3 + a_7u^2v + a_8uv^2 + a_9v^3 + a_{10}u^4 + a_{11}u^3v + a_{12}u^2v^2 + a_{13}uv^3 + a_{14}v^4$$

u = breedte (graden) – 55°

v = lengte (graden) oost van Greenwich

Δ = correctie in graden.

Voor de breedte- en lengtecorrectie geldt dezelfde formule, echter met verschillende constanten.

Constanten	Breedte	Lengte
a_0	$-0,556\ 098 \cdot 10^{-5}$	$0,148\ 944 \cdot 10^{-4}$
a_1	$-0,155\ 391 \cdot 10^{-5}$	$0,268\ 191 \cdot 10^{-5}$
a_2	$-0,402\ 620 \cdot 10^{-6}$	$0,245\ 290 \cdot 10^{-5}$
a_3	$-0,509\ 693 \cdot 10^{-6}$	$0,294\ 400 \cdot 10^{-6}$
a_4	$-0,819\ 775 \cdot 10^{-6}$	$0,152\ 260 \cdot 10^{-5}$
a_5	$-0,247\ 592 \cdot 10^{-6}$	$0,910\ 592 \cdot 10^{-6}$
a_6	$0,136\ 682 \cdot 10^{-6}$	$-0,368\ 241 \cdot 10^{-6}$
a_7	$0,186\ 198 \cdot 10^{-6}$	$-0,851\ 732 \cdot 10^{-6}$
a_8	$0,123\ 350 \cdot 10^{-6}$	$-0,566\ 713 \cdot 10^{-6}$
a_9	$0,568\ 797 \cdot 10^{-7}$	$-0,185\ 188 \cdot 10^{-6}$
a_{10}	$-0,232\ 217 \cdot 10^{-8}$	$0,284\ 312 \cdot 10^{-7}$
a_{11}	$-0,769\ 931 \cdot 10^{-8}$	$0,684\ 853 \cdot 10^{-7}$
a_{12}	$-0,786\ 953 \cdot 10^{-8}$	$0,500\ 828 \cdot 10^{-7}$
a_{13}	$-0,612\ 216 \cdot 10^{-8}$	$0,415\ 937 \cdot 10^{-7}$
a_{14}	$-0,401\ 382 \cdot 10^{-8}$	$0,762\ 236 \cdot 10^{-8}$

Tabel 14.

De resterende verschillen tussen ED50 en ED87 zijn in de orde van 20 cm in Nederland.

Controle:

ED87:	$\varphi = 53^\circ$	$\lambda = 4^\circ$
ED50:	$\varphi = 53^\circ,000\ 0025$	$\lambda = 3^\circ,999\ 9834$

16. Transformatie van ED87 naar WGS84

Voor de Noordzee is ook de best passende transformatie van ED87 naar WGS84 berekend volgens de formules (9) of (9a) (B.G. Harsson, 1990). Deze coördinaten worden wel aangeduid met WGS-SEA.

$$X_{WGS84} = X_{ED87} + T + R \cdot X_{ED87}$$

met:

$$T_x = -82,98$$

$$T_y = -99,72$$

$$T_z = -110,71$$

$$\alpha = 0,5067 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

$$\beta = -0,1503 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

$$\gamma = -0,3898 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

$$\delta = -0,3143 \cdot 10^{-6}$$

De ED87-coördinaten moeten eerst worden omgerekend van (φ, λ, h) naar (x, y, z) met de formules (6). De WGS84-coördinaten kunnen daarna worden teruggerekend naar (φ, λ, h) met (7) of (7a). Denk er aan, dat ED87 en WGS84 berekend zijn op verschillende ellipsoïdes (zie tabel 3).

17. WGS84 en ETRS89

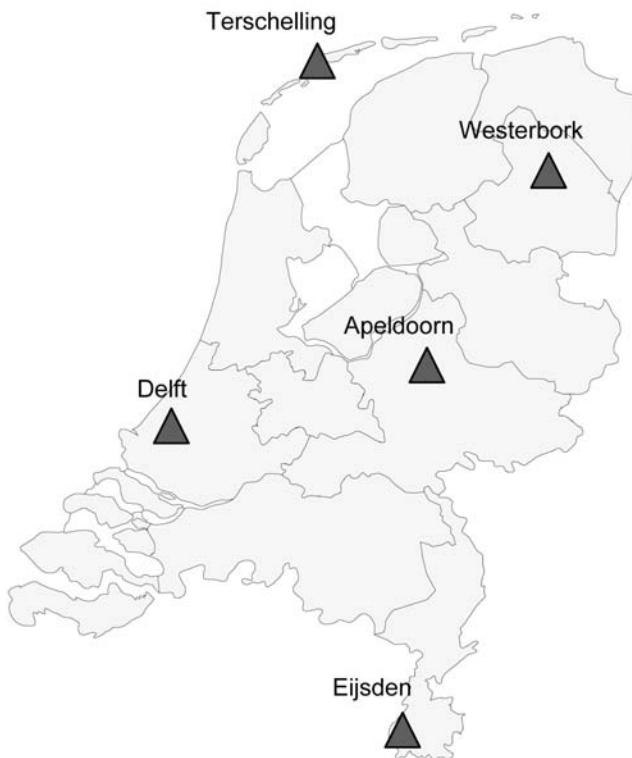
De vereffening van het Europese geodetische netwerk ED50 en de verbetering van dit net, ED87, zijn gebaseerd op de internationale ellipsoïde van 1930, ook wel Hayford-ellipsoïde genoemd. Deze ellipsoïde wijkt tamelijk veel af van de huidige ellipsoïde die gebruikt wordt bij de bepaling van coördinaten met GPS, het WGS84-systeem. Het ligt daarom voor de hand om over te stappen naar een nieuw Europees geodetisch systeem dat gebaseerd is op WGS84. Hiermee is een begin gemaakt in 1989. Het nieuwe systeem wordt ETRS (European Terrestrial Reference System) genoemd. Het systeem komt voort uit de vereffening van een GPS-netwerk. Het net strekte zich uit van Noord-Noorwegen tot Griekenland en Spanje. Dit net werd aangesloten op 15 punten die met SLR (Satellite Laser Ranging) gemeten zijn en 11 punten die met VLBI (Very Long Baseline Interferometry) gemeten zijn. De TU Delft heeft in samenwerking met enige andere internationale rekencentra deelgenomen aan de vereffening van het net.

Het WGS84-systeem is gekoppeld aan een aantal vaste punten met coördinaten van sterren. De satellietbanen en dus de hiermee berekende GPS-coördinaten zijn in dit systeem berekend. Voor Europa is dit ongunstig daar de punten in Europa op een aard-schol liggen die beweegt ten opzichte van andere aardschollen. De WGS84-coördinaten van Europese punten veranderen dus voortdurend hetgeen onpraktisch is. Daarom heeft men in Europa het ETRS89-systeem ingevoerd. Dit is vastgekoppeld aan een groot aantal vaste punten in Europa.

Ook in Nederland hebben we een aantal vaste punten die als basis dient voor ETRS. Dit is het AGRS.NL-net (Actief GPS Referentie Systeem Nederland). Nauwkeurige differentiële GPS-fasemetingen (DGPS) geven coördinaten in ETRS. Om deze om te rekenen naar het RD-systeem is een transformatie gedefinieerd onder de naam 'RDNAPTRANS'. Daar het RD-net niet precies gelijkvormig is met het ETRS-net, zijn in de transformatie kleine correctietermen ingebouwd van maximaal 25 cm. Hiermee kan men met DGPS RD-coördinaten berekenen. Bij het Kadaster kan men informatie krijgen over het gebruik van 'RDNAPTRANS' (zie ook: H. van der Marel, Geodesia 2000-9).

Sommige landen hebben besloten dit verdichte ETRS-net in de toekomst als nieuw nationaal systeem te gebruiken. De 3D-coördinaten worden dan bovendien geprojecteerd naar het platte vlak via de UTM-projectie. Daarbij wordt de WGS84-ellipsoïde gebruikt. De zone-indeling en schaalconstante 0,9996 blijven hetzelfde als beschreven in hoofdstuk 10.

Er moet echter voor gewaarschuwd worden om twee UTM-systemen naast elkaar te gebruiken, één gebaseerd op ED50 en een ander gebaseerd op ETRS89. Vaak worden kaarten en coördinaten gebruikt zonder expliciet te vermelden in welk systeem ze berekend zijn. De coördinaten van ED50 en ETRS kunnen meer dan 200 m verschillen. Als bijvoorbeeld de plaats van een oliebooring op de Noordzee bepaald moet worden en men weet niet in welk systeem de coördinaten zijn berekend, dan kan een fout vele miljoenen euro's kosten. (Dit is al eens gebeurd).



Figuur 9. Vijf permanente GPS-referentiestationen van het Actief GPS Referentie Systeem Nederland (AGRS.NL).

18. Astronomische breedte en lengte

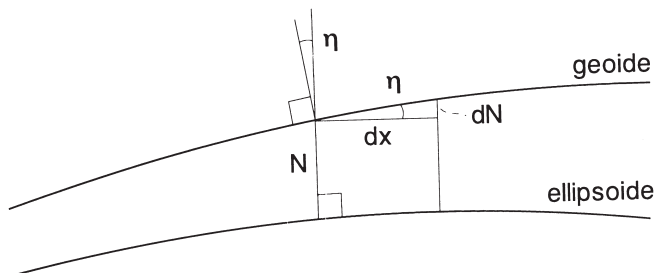
De breedte en lengte die in de voorgaande paragrafen behandeld zijn, waren breedte en lengte op de ellipsoïde, dus de hoek van de loodlijn op de ellipsoïde met respectievelijk het equatorvlak en met het x , z -vlak. Als een andere ellipsoïde gekozen wordt of de ellipsoïde verschoven wordt, veranderen de ellipsoïdische breedte en lengte. Bijvoorbeeld een vast punt heeft verschillende breedte en lengte in het RD-systeem, ED50-systeem of in WGS84.

Daarnaast bestaan er ook nog astronomische breedte en lengte, φ_a en λ_a . Deze geven de hoek van de werkelijke loodlijn met het equatorvlak en het meridiaanvlak van Greenwich. De astronomische coördinaten kunnen worden waargenomen door met een theodoliet de richtingen naar de sterren te meten. De coördinaten van de sterren zijn bekend ten opzichte van het astronomisch gedefinieerde coördinatenstelsel. De astronomische breedte en lengte zijn dus *niet* afhankelijk van de keuze van de ellipsoïde. Het nadeel van astronomische coördinaten is, dat ze afhankelijk zijn van de massa-onregelmatigheden in de bodem en dus onregelmatig veranderen van plaats tot plaats.

Het verschil tussen de astronomische en ellipsoïdische breedte en lengte is klein en wordt de *schietloodafwijking* genoemd. Deze wordt in twee componenten ontbonden: in noord-zuid richting ξ en in oost-west richting η . In formule:

$$\xi = \varphi_a - \varphi_e \quad \eta = (\lambda_a - \lambda_e) \cos\varphi \quad (26)$$

Deze formules gelden als de assen van de ellipsoïde evenwijdig zijn aan de assen van het astronomisch stelsel.



Figuur 10.

De ellipsoïdische coördinaten volgen meestal uit de berekening van een driehoeksnet op de ellipsoïde, bijvoorbeeld in RD of in ED50. Ze kunnen ook berekend zijn uit GPS, dan krijgt men coördinaten in WGS84. Als we bovendien in enige punten astronomische metingen gedaan hebben, kunnen we de schietloodafwijkingen berekenen met de formules (26).

De schietloodafwijking kan geïnterpreteerd worden als de helling van de geoïde ten opzichte van de ellipsoïde (zie hoofdstuk 19).

Als N de hoogte van de geoïde boven de ellipsoïde is, dan is:

$$\eta = -\frac{dN}{dx} \quad \xi = -\frac{dN}{dy} \quad (27)$$

dx en dy zijn horizontale afstanden in respectievelijk oost en noord richting. Het verloop van de geoïde kan berekend worden aan de hand van de schietloodafwijkingen met:

$$dN = -\eta dx - \xi dy \quad (28)$$

Deze methode om de geoïde te berekenen wordt 'Astronomisch nivellement' genoemd. De schietloodafwijkingen zijn in de orde van een paar boogseconden.

In Nederland zijn van 1974 tot 1977 in 32 punten de astronomische breedte en lengte waargenomen door de heer C. de Vries van de voormalige Faculteit der Geodesie. Helaas overleed de heer De Vries kort nadat het werk was volbracht. De resultaten zijn gepubliceerd door G.J. Husti (1978). In tabel 15 zijn de resultaten vermeld, die verzameld zijn door F. Schreutelkamp.

In tabel 15 zijn φ_a en λ_a de astronomische coördinaten die zijn waargenomen. ξ en η zijn de schietloodafwijkingen in boogseconden ten opzichte van de ellipsoïdische coördinaten op de Bessel-ellipsoïde van het RD-systeem. ξ en η zijn berekend met de formules (26).

Astronomische coördinaten

De plaats van zon, maan en sterren op de hemelbol wordt vastgelegd door *rechte klimming*, α , (Engels: right ascension) en *declinatie*, δ . Dit zijn coördinaten op de hemelbol, te vergelijken met lengte en breedte van een plaats op aarde. De waarden van α en δ van zon, maan en sterren zijn te vinden in de *Astronomical Almanac* en in de *Apparent Places of Fundamental Stars* die jaarlijks worden uitgegeven. Voor de sterren zijn α en δ bijna onveranderlijke getallen. De zon en maan bewegen ten opzichte van sterren, dus α en δ veranderen daardoor steeds met de tijd. Om de plaats van zon, maan en sterren op een bepaald tijdstip te bepalen ten opzichte van de aarde moet het *azimut*, A , ten opzichte van het noorden, en de *hoogte*, h boven de horizon berekend worden.

Nr.	Station (centrum)	φ_e (Bessel)	φ_a astro	λ_e (Bessel)	λ_a astro	ξ''	η''
1	Aardenburg	51° 16' 26",27	23",93	03° 26' 53",19	51",88	-2",34	-0",82
2	Ameland	53 27 31,00	30,22	05 46 54,37	56,55	-0,78	+1,30
3	Amersfoort	52 09 22,18	21,96	05 23 15,50	14,30	-0,22	-0,73
-	Axel	51 16 08,83	07,38	03 52 17,13	17,47	-1,45	+0,21
5	Beek en Donk	51 31 37,98	36,39	05 37 41,24	34,91	-1,60	-3,94
8	Berkheide	52 10 38,64	37,40	04 23 21,58	20,21	-1,24	-0,84
9	Bosberg	52 57 08,29	09,63	06 20 30,91	32,88	+1,34	+1,19
-	Delft, Geodesie	51 59 13,42	12,19	04 23 16,39	14,99	-1,23	-0,86
13	Eierland	53 10 59,67	58,78	04 51 20,25	19,78	-0,89	-0,28
15	Finsterwolde	53 11 53,97	54,0	07 06 08,16	08,0	+0,10	-0,10
18	Goedereede	51 49 09,70	09,46	03 58 33,55	34,94	-0,24	+0,86
21	Groningen	53 13 13,78	13,98	06 34 07,71	07,68	+0,19	-0,02
23	Harikerberg	52 14 12,06	13,04	06 32 25,96	22,42	+0,97	-2,17
32	Klifsberg	51 09 53,35	53,32	06 09 00,67	49,84	-0,02	-6,79
-	Kootwijk (Obs.)	52 10 45,02	44,09	05 48 38,40	35,65	-0,92	-1,69
35	Leeuwarden	53 12 14,75	14,90	05 47 24,65	26,36	+0,15	+1,03
129	Leiden (Obs.)	52 09 20,93	20,14	04 29 02,27	01,46	-0,79	-0,50
36	Lemelerberg	52 28 26,37	27,64	06 24 29,05	28,70	+1,26	-0,22
37	Luykgestel	51 17 26,39	29,09	05 19 14,88	16,62	+2,70	+1,09
40	Monnickendam	52 27 27,92	28,23	05 01 57,20	57,47	+0,31	+0,17
44	Nederweert	51 17 12,99	13,16	05 44 54,73	49,86	+0,17	-3,04
45	Oirschot	51 30 16,04	16,81	05 18 27,22		+0,77	
47	Oldenzaal	52 18 48,19	48,70	06 55 44,53	39,10	+0,50	-3,30
48	Oosterhout	51 38 45,78	45,50	04 51 39,98	40,85	-0,28	+0,54
49	Oss	51 46 12,64	10,13	05 31 21,23	16,76	-2,51	-2,77
50	Oudgastel	51 35 16,77	16,53	04 27 37,46	37,64	-0,24	+0,11
-	Rozendaal 3	52 02 27,27	26,14	05 59 17,28	13,91	-1,13	-2,08
-	Rijswijk	52 01 31,58	29,95	04 20 46,67	45,06	-1,63	-0,99
155	Sambeek	51 38 12,02	11,15	05 57 54,54		-0,87	
56	Schoorl	52 41 55,87	54,78	04 41 18,25	18,60	-1,10	+0,21
58	Sleen	52 46 37,33	38,63	06 48 11,47		+1,30	
59	Steenwijk	52 47 19,74	20,44	06 06 55,27	55,28	+0,70	+0,00
10	Terschelling	53 21 41,22	39,98	05 12 52,72		-1,24	
61	Ubachsberg	50 50 49,18	53,16	05 57 12,43	06,17	+3,98	-3,95
61	Ubachsberg	50 50 49,18	53,53	05 57 12,43	05,95	+4,35	-4,09
63	Uithuizermeden	53 24 33,98	32,27	06 42 37,19	35,68	-1,71	-0,90
65	Urk	52 39 43,83	42,98	05 35 32,93	31,44	-0,85	-0,90
66	Utrecht	52 05 29,87	28,55	05 07 18,14		-1,32	
-	Utrecht (Obs.)	52 05 11,23	09,95	05 07 46,67	45,45	-1,28	-0,75
68	Venray	51 31 42,55	42,33	05 58 33,07	27,05	-0,21	-3,75
72	Winterswijk	51 58 22,82	21,76	06 43 15,17	11,72	-1,06	-2,12
175	Wolberg	52 23 27,60	27,53	05 55 08,31		-0,07	
73	Workum	52 58 48,52	48,82	05 26 34,32	34,41	+0,30	+0,06
75	Zaltbommel	51 48 46,62	43,79	05 15 09,04	07,11	-2,82	-1,19
76	Zierikzee	51 39 04,35	03,70	03 54 53,97	53,66	-0,65	-0,20

Tabel 15.

Daar de aarde draait bewegen de sterren in één dag rond de hemelbol. Om de plaats van de sterren te berekenen moet de tijd precies worden waargenomen. In de winter is dit Midden Europese Tijd (MET) en in de zomer Midden Europese Zomer Tijd (MEZT). Hieruit kan berekend worden: Greenwich Middelbare Tijd (GMT) die tegenwoordig officieel heet: Universele Tijd (UT)

$$UT = MET - 1 \text{ uur} = MEZT - 2 \text{ uur}$$

Verder moet ook de Greenwich Middelbare Sterrentijd (GMST) berekend worden. De precieze waarden van GMST moeten in de *Astronomical Almanac* opgezocht worden. Een benaderingsformule is:

$$GMST = UT + \text{dag} \cdot \frac{24}{365,25} + \frac{UT}{365,25} + c \pm 24 \text{ uur}$$

dag is het dagnummer van het jaar,

c is de GMST op 0 januari, 0 UT van het betreffende jaar. Een benadering is:

voor schrikkeljaren: $c = 6 \text{ uur } 35 \text{ min} = 6,59 \text{ uur}$

1 jaar later: $c = 6 \text{ uur } 38 \text{ min} = 6,64 \text{ uur}$

2 jaar later: $c = 6 \text{ uur } 37 \text{ min} = 6,62 \text{ uur}$

3 jaar later: $c = 6 \text{ uur } 36 \text{ min} = 6,60 \text{ uur}$

Als we de sterrentijd weten kunnen we de *uurhoek* t van de hemellichamen berekenen (elk uur draait de hemel 15°):

$$t = GMST \cdot 15^\circ + \lambda - \alpha$$

t = uurhoek in graden

GMST = sterrentijd in decimale uren

λ = oosterlengte van de plaats op aarde in graden

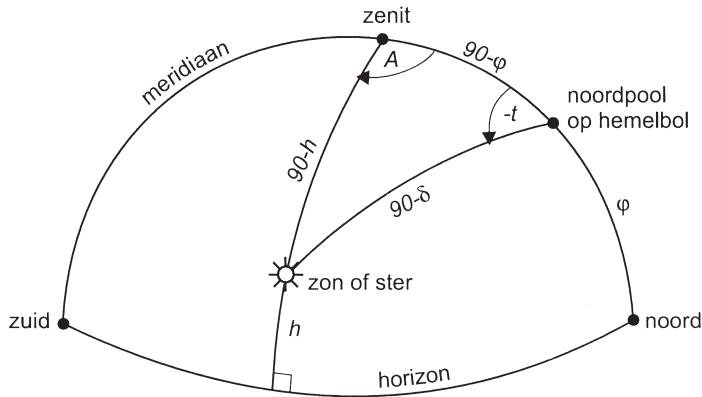
α = rechte klimming in graden.

De uurhoek van de zon kunnen we ook direct in UT uitdrukken:

$$t_{zon} = (UT + e \pm 12 \text{ uur}) \cdot 15^\circ + \lambda$$

e is de zogenaamde *tijdsvereffening*. Dit is een correctie op UT van ongeveer + of -15 min, afhankelijk van de tijd in het jaar (zie: *Almanac*).

Nu we de uurhoek t en de declinatie δ van de zon, maan of ster weten, kunnen we de *hoogte* h en het *azimut* A berekenen als we ook nog de *breedte* ϕ van de plaats op aarde weten. De formules volgen uit de boldriehoeksmmeetkunde toegepast op de hemelbol (figuur 11).



Figuur 11.

Hoogte: $\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos t$

Azimut: $\tan A = \frac{-\sin t}{\tan \delta \cdot \cos \varphi - \sin \varphi \cdot \cos t}$

Als de noemer kleiner is dan nul, dan moet men 180° optellen bij A.

Controle: $\sin A \cdot \cos h + \sin t \cdot \cos \delta = 0$

Voorbeeld: Voor de poolster is $\delta = 90^\circ$. Hieruit volgt dat $h = \varphi$, dus de hoogte van de poolster is gelijk aan de breedte op aarde. Vandaar de uitdrukking, afkomstig uit de zeevaart: "Even poolshoogte nemen", dat wil zeggen de hoogte van de poolster bepalen om daarmee de plaats (breedte) op aarde te bepalen, dus kijken waar je staat.

Omgekeerd kunnen we ook de lengte λ en de breedte φ oplossen als we van een aantal sterren de hoogte h en/of het azimut A met bijbehorende tijdstippen meten. Op deze manier werd vroeger op zee en op land de plaats bepaald.

Referenties

1. ARCA, S., Atlas of the vertical deflection points in Europe and Meriterranean Countries, International Association of Geodesy, Rome, 1982.
2. HUSTI, G.J., Geodetic-astronomical observations in The Netherlands, 1947-1973, Netherlands Geodetic Commission, Publication on Geodesy, New Series, Delft, 1975.
3. HUSTI, G.J., Deviations of the vertical in The Netherlands from geodetic-astronomical observations, Netherlands Geodetic Commission, Publication on Geodesy, New Series, Delft, 1978.

4. OUDEMANS, J.A.C., Déterminations de la latitude et d'un azimut aux stations Oirschot, Utrecht, Sambeek, Wolberg, Harikerberg, Sleen, Schoorl, Zierikzee, Ter-schelling, Ameland, Leeuwarden, Urk et Groningue, Commission Géodésique Néerlandaise, Delft, 1904.
5. RODE, A., Simultanbestimmungen der Lotabweichungskomponenten ξ und η mit dem Prismenastrolabium, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft Nr. 163, Frankfurt, 1969.
6. RODE, A., Simultanbestimmungen der Lotabweichungskomponenten ξ und η mit dem Prismenastrolabium, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft Nr. 197, Frankfurt, 1974.
7. RIJKSCOMMISSIE VOOR GRAADMETING EN WATERPASSING, Travaux géodésiques exécutés aux Pays-Bas, 1924, 1925 et 1926, Note présentée a la troisième assemblée générale de l'UGGI, Commission Géodésique Néerlandaise, Delft, 1927.
8. SANDE BAKHUYZEN, H.G. VAN DE, SANDE BAKHUYZEN, E.F. VAN DE, Détermination de la différence de longitude Leyde-Greenwich, exécutée en 1880 et 1881 par M.M. H.G. et E.F. v.d. Sande Bakhuyzen, Annalen der Sternwarte in Leiden, Band VII, Den Haag, 1897.
9. SANDE BAKHUYZEN, H.G. VAN DE, Déterminations de la différence de longitude Leyde-Ubagsberg, de l'azimut de la direction Ubagsberg-Sittard et de la latitude d'Ubagsberg, Commission Géodésique Néerlandaise, Delft, 1905.
10. SCHREUTELKAMP, F.H., Briefwisseling, 1996.
11. SCHRICK, K.W., Astronomisch-geodätische Messungen, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft Nr. 85, Frankfurt, 1962.
12. SCHRICK, K.W., Astronomisch-geodätische Beobachtungen 1960 auf Borkum, Norderney, Pilsum und Niederreifenberg, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft Nr. 102, Frankfurt, 1963.
13. SITTE, W. DE, Positions of 84 stars near the north pole determined with the meridian circle of the observatory in the years 1877-1885, under the directorate of Prof. Dr. H.G. van de Sande Bakhuyzen, Annalen van de sterrewacht te Leiden, Band XIII, Haarlem, 1923.
14. ZWIERS, H.J., Communication from the Observatory at Leiden: Results of the Observations for the variation of latitude made with the Zenit telescope of the Leiden Observatory, Bulletin of the Astronomical institutes of the Netherlands, vol. II, no. 59, pp. 133-134, 1924.

19. Hoogtesystemen

Het hoogtesysteem in Nederland omvat de gewaterpaste hoogtes boven het NAP (Normaal Amsterdams Peil). Dit NAP is voortgekomen uit het Amsterdams Peil (AP), dat is bepaald als het niveau van de gemiddelde vloed op het IJ in Amsterdam omstreeks 1700. Bij dit niveau moesten de sluizen gesloten worden uit veiligheid. Het huidige niveau van het NAP-vlak is ongeveer gelijk aan het oude AP-vlak. Ten gevolge van de zeespiegelrijzing is het niet meer gelijk aan de gemiddelde vloed, maar komt het in de buurt van gemiddeld zeeniveau van de Noordzee. De hoogte van het NAP-vlak is tegenwoordig vastgelegd door de definitie sinds 1955: 1,4287 m beneden de bout, aangebracht op de speciale funderingspaal (ondergronds-merk) onder het plaveisel op de Dam in Amsterdam (A. Waalewijn, *Drie eeuwen NAP*, 1986).

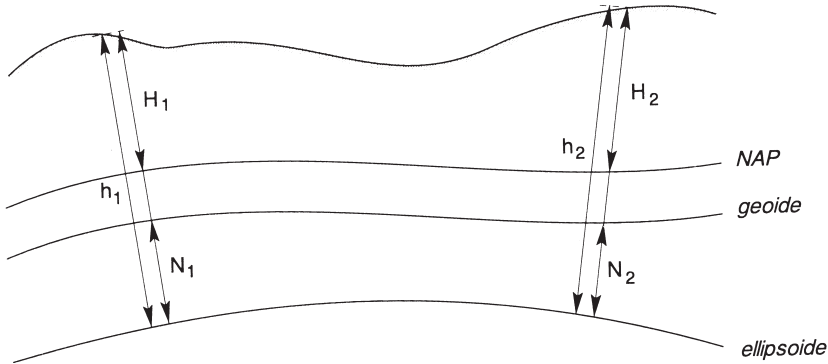
Doordat bij waterpassing de instrumenten altijd precies gehorizonteerd worden, zijn waterpashoogtes de hoogtes boven het vlak dat overal loodrecht op de zwaartekracht staat. Dit vlak op gemiddeld zeeniveau wordt de *geoïde* genoemd. Het NAP-vlak is evenwijdig aan de geoïde, maar valt er niet mee samen, omdat we niet precies weten hoeveel het zeeniveau in Amsterdam afwijkt van het gemiddelde zeeniveau over de hele aarde.

De gewaterpaste hoogtes moeten eventueel nog gecorrigeerd worden voor het niet evenwijdig lopen van de niveauvlakken. Deze correctie noemt men de orthometrische correctie en de gecorrigeerde hoogten noemt men *orthometrische hoogten*, omdat het de loodrechte (ortho) afstand (metrisch) is boven het NAP-vlak. In Nederland is deze correctie echter te verwaarlozen. Slechts in Zuid-Limburg kan dit oplopen tot een paar mm. In bergachtige gebieden kan deze correctie oplopen tot enige decimeters. De orthometrische hoogten noemen we *H*. Deze definitie van hoogte houdt in dat punten op hetzelfde niveauvlak niet altijd dezelfde orthometrische hoogte hebben. Daarom is een tweede soort hoogte ingevoerd: de *dynamische hoogte*. Deze geeft aan in welke richting het water stroomt, dat wil zeggen van een hoger niveauvlak naar een lager niveauvlak. Over de berekening zie: G.L. Strang van Hees, NGT Geodesia, april 1980 en Zeitschrift für Vermessungswesen, november 1992.

Uit GPS-waarnemingen wordt ook een hoogte berekend. Daar GPS berekend wordt aan de hand van satellietbanen zijn de coördinaten ruimtelijke coördinaten ten opzichte van het massacentrum van de aarde. Door een ellipsoïde in te voeren kan men een hoogte, *h*, boven de ellipsoïde berekenen uit GPS.

Het verschil ($h - H$) tussen GPS en waterpashoogtes is de hoogte van het NAP-vlak boven de ellipsoïde. Verder kan men uit zwaartekrachtmetingen de hoogte van de geoiden (N) boven de ellipsoïde berekenen. Het verschil tussen ($h - H$) en N is dan het verschil tussen NAP en geoiden. De absolute hoogte van de geoiden is niet beter te berekenen dan op een paar dm, dat wil zeggen dat het verschil tussen geoiden en NAP ook niet beter te bepalen is. Dit verschil is echter vrij constant over Nederland, zodat voor het verschil in hoogten tussen twee punten geldt:

$$h_2 - h_1 = (H_2 - H_1) + (N_2 - N_1)$$



Figuur 12.

Het hoogteverschil ($h_2 - h_1$) volgt uit GPS.

Het hoogteverschil ($H_2 - H_1$) volgt uit waterpassing.

Het hoogteverschil ($N_2 - N_1$) volgt uit zwaartekracht

Bovenstaande formule geeft dus een goede controle op GPS, waterpassing en geoidenbepaling. Momenteel (1993) zijn de onnauwkeurigheden in GPS nog de grootste, een paar cm. Waterpassing is nauwkeurig op mm en geoidenverschillen kunnen bij een goed dicht zwaartekrachtmetnet ook tot op 1 à 2 cm per 10 km berekend worden.

De hoogtes h en N zijn ook afhankelijk van de ligging van de ellipsoïde, dus van de keuze van het referentiesysteem. Zoals uit figuur 12 te zien is, is de waterpashoogte H onafhankelijk van de keuze van het referentiesysteem. Door verschuiving van de ellipsoïde is de verandering van N dezelfde als van h , dus

$$\Delta N = \Delta h$$

De GPS-hoogtes h worden berekend in het WGS84-systeem. Dit wil zeggen, dat de geoidenhoogtes ook in WGS84 moeten worden berekend. Meestal zijn de geoidenhoogtes gegeven in een ander systeem, bijvoorbeeld ED50 of ten opzichte van de Nederlandse Bessel-ellipsoïde. De geoidenhoogtes moeten dan getransformeerd worden van het lokale systeem naar WGS84 via de datumtransformatie (9) of (10). De translatie- en

rotatieparameters moeten dan bekend zijn. Eerst moet men met (6) uit (φ, λ, h) de rechthoekige coördinaten (x, y, z) berekenen. Voor h neemt men in dit geval de geoidhoogte N . Na de datumtransformatie (10), berekent men weer (φ, λ, h) in het nieuwe systeem met (7). De nieuwe h is de geoidhoogte in het nieuwe systeem.

Geoïde

De geoidhoogte is op verschillende manieren te bepalen.

1. Uit zwaartekrachtmetingen. Hiervoor is het noodzakelijk over de gehele aarde de zwaartekracht te kennen. Vandaar dat er internationale projecten zijn om alle metingen te verzamelen en hieruit de geoidhoogte te bepalen voor de gehele aarde, ten opzichte van een internationaal referentiesysteem, zoals WGS84. Daar er gebieden op aarde zijn waar de zwaartekracht niet goed bekend is (Azië, Afrika en de oceanen) wordt de zwaartekracht voor deze gebieden afgeleid uit satellietbanen. De langgolvlige structuur van het zwaartekrachtveld kan hieruit worden afgeleid. Voor de fijne structuur moet men ter plaatse meten, maar zolang er nog gebieden zijn waar dit niet gedaan is, is de absolute geoidhoogte niet beter te berekenen in Nederland dan tot op ongeveer 0,5 m. Daar de zwaartekracht in de omgeving van Nederland de grootste invloed heeft op de geoid, is in 1993 een nieuw zwaartekrachtmetnet gemeten in Nederland. Geoidhoogteverschillen zijn echter veel beter te berekenen, zelfs tot op een paar cm, indien een goed lokaal zwaartekrachtmetnet gemeten is.

2. Geoidhoogteverschillen zijn ook te bepalen uit GPS en waterpassing volgens de formule:

$$N_2 - N_1 = (h_2 - h_1) - (H_2 - H_1)$$

Dit geeft een goede controle op de geoid, die uit zwaartekracht is berekend.

3. Op zee valt de geoid ongeveer samen met het zeeoppervlak, indien gecorrigeerd wordt voor getijden, zeestromen en temperatuurverschillen van het zeewater. Het zeeoppervlak is nauwkeurig te meten met behulp van satelliet-altimetrie, dat is een radarhoogtemeting vanuit de satelliet naar het zeeoppervlak. Op deze wijze is voor de gehele aarde het oceaanoppervlak opgemeten en hiermee is een belangrijke bijdrage gegeven aan de geoidberekening op de oceanen. Hieruit kan weer de zwaartekracht op de oceanen berekend worden. Deze zwaartekracht hebben we dan weer nodig om de geoid in Nederland te berekenen volgens de zwaartekrachtmethode.

4. Een vierde manier om de geoid te berekenen is met astronomische waarnemingen. Uit de stand van de sterren kunnen we de richting van de plaatselijke verticaal berekenen, dus de astronomische lengte en breedte. Het verschil met de lengte en breedte op de ellipsoïde, die uit het geodetische driehoeksnet (RD) volgt, geeft de schietloodafwijkingen ξ en η (zie: hoofdstuk 18, formule (26)). Het verloop van de geoid ten opzichte

van de ellipsoïde waarop het driehoeksnet is berekend, verkrijgen we uit ξ en η met (28):

$$dN = -\eta dx - \xi dy$$

Deze methode is de laatste tijd niet veel meer gebruikt, omdat het meten van de stand van de sterren met een theodoliet veel tijd kost. De methode heeft echter wel het grote voordeel dat men geen zwaartekrachtgegevens over de hele aarde nodig heeft. Men is dus onafhankelijk van de geheimhouding van meetgegevens in andere landen.

Tegenwoordig is er een tendens die deze methode mogelijk weer actueel maakt. Er zijn zenitcamera's ontwikkeld die een foto maken van de sterren rond de zenit. Uitmeting van de foto geeft de astronomische lengte en breedte op een snelle wijze. Zodoende kan men vrij snel een groot aantal punten opmeten en daarmee een nauwkeurige geoïde berekenen.

Dit geeft een onafhankelijke controle en verbetering van de zwaartekracht geoïde. Speciaal voor een klein land als Nederland is dit een aantrekkelijke methode.

De meest nauwkeurige methode om de geoïde te bepalen is uit zwaartekracht. In Nederland is in de tachtiger jaren een net van ongeveer 8000 zwaartekrachtspunten gemeten door de Meetkundige Dienst van de Rijkswaterstaat, tegenwoordig Adviesdienst voor Geo-Informatie en ICT (AGI) van de Rijkswaterstaat genoemd. Hiermee is in 1996 de geoïde berekend door dr.ir. E.J. de Min in zijn proefschrift bij de TU Delft. Nadien is het aantal zwaartekrachtspunten uitgebreid, voornamelijk in het grensgebied met België en Duitsland. Door ir. M.J.E. Crombaghs en ir. A.J.T. de Bruijne van de AGI is een verbeterde geoïde berekend in 2004. De precisie is ongeveer 0,5 cm per 50 km afstand. Dit is voldoende om GPS en waterpashoogten te vergelijken met geoïdehoogten. De nieuwe geoïde wordt genoemd: 'NLGEO2004' (zie: M. Crombaghs, A. de Bruijne, *NLGEO2004. Een nieuw geoïdemodel voor Nederland*, RWS AGI, Delft, november 2004).

Zeediepten

Zeediepten op de Noordzee en de rivierdiepten worden niet ten opzichte van NAP weergegeven. Het zou gevaarlijk zijn voor de scheepvaart als de werkelijke zeediepte kleiner zou zijn dan op de kaart is aangegeven. Daarom zijn de zeediepten op de kaart de minimale zeediepten die aangegeven zijn ten opzichte van een referentievlak dat gedefinieerd is als: meerjarig gemiddelde (in de regel over 5 jaar) van de laagste laagwaterstand per maand bij springtij, dus laag laag water spring (LLWS). Dit referentievlak ligt ongeveer 2,50 m beneden NAP, maar is verschillend voor verschillende plaatsen langs de kust.

Buitenlandse hoogtesystemen

België

In België is het nulvlak voor het hoogtesysteem vastgelegd aan de gemiddelde laagwaterstand (!) in Oostende in 1958. Deze hoogte is 2,34 m beneden NAP, zodat alle hoogtes in België 2,34 m groter zijn dan de Nederlandse hoogte voor hetzelfde punt.

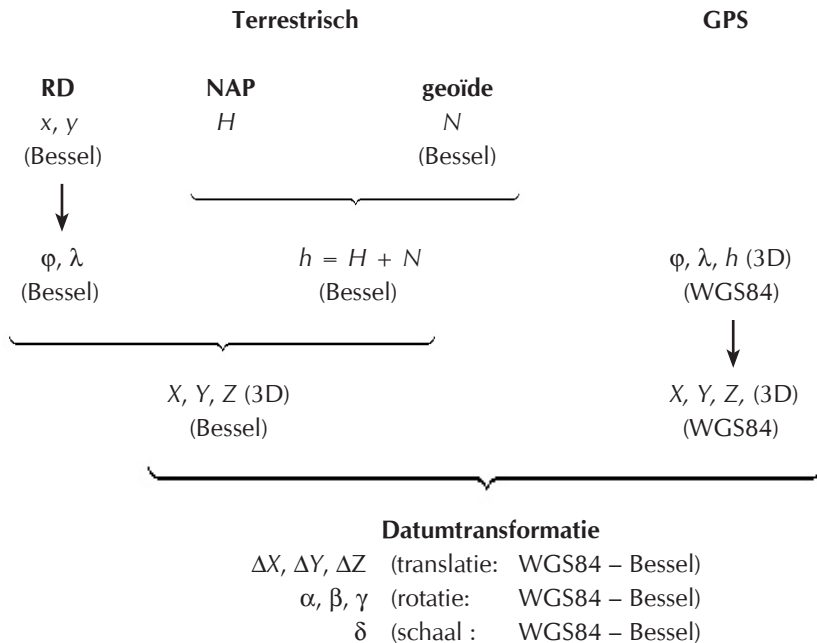
Duitsland

Het Duitse hoogtenet, Deutsches Haupt Höhen Netz (DHHN), is oorspronkelijk in 1912 afgeleid uit het Amsterdams Peil. Daarna zijn er meerdere malen nieuwe vereffeningen berekend, de laatste na de Duitse hereniging in 1992 (DHHN92). Hierbij werd uitgegaan van de hoogte van het station Wallenhorst, nabij Osnabrück, dat werd berekend uit de geopotential van de Europese hoogtevereffening (REUN 1986). In Duitsland zijn Normaalhoogten berekend die gebaseerd zijn op de normaalzwaartekracht volgens het ellipsoïdemodel GRS80.

In vlak land zijn deze hoogten praktisch gelijk aan de orthometrische hoogten die in Nederland gebruikt worden. Het Duitse nulvlak, Normal Null (NN), ligt slechts 2 cm boven het NAP-vlak in de omgeving van de Nederlands-Duitse grens.

20. Schema RD – NAP – geoïde – GPS

Schema voor de berekening van RD-coördinaten (x, y) en NAP-hoogten uit GPS-metingen.



1. Bepaling datumtransformatie

Als een aantal punten in *beide* systemen gegeven is, kan men uit RD, NAP en geoïde de 3D-Bessel-coördinaten bepalen en uit GPS de 3D-WGS84-coördinaten. Het verschil is de datumtransformatie (translatie, rotatie en schaal).

2. Bepaling RD – NAP – geoïde uit GPS

Uit GPS volgen de 3D-WGS84-coördinaten. Pas datumtransformatie toe. Dit geeft 3D-Bessel-coördinaten.

Transformeer naar φ, λ, h . Uit φ en λ volgen de RD-coördinaten x en y .

Indien de geöïde boven de Bessel-ellipsoïde gegeven is, volgt uit h de NAP-hoogte H :

$$H = h - N$$

Indien de NAP-hoogte H reeds bekend is, kan men uit h de geöïdehoogte N berekenen boven de Bessel-ellipsoïde:

$$N = h - H$$

Dit is een goede controle op de geöïde, die uit zwaartekracht is berekend.

Opmerking

Alle metingen, RD – NAP – geöïde – GPS, zijn relatieve metingen. Men kan dus alleen *verschillen* bepalen in coördinaten of hoogten tussen naburige punten.

21. Literatuur

1. BAKKER, G., MUNCK, J.C. DE, STRANG VAN HEES, G.L., Radio Positioning at Sea, Delfts Universitaire Pers, Faculteit der Geodesie, Delft, 1989.
2. BOWRING, B.R., Transformation from spatial to geographical coordinates, Survey Review, 181, juli 1976, pp. 323-327.
3. BOWRING, B.R., The accuracy of geodetic latitude and height equations, Survey Review vol. 28, October 1985.
4. BRUIJNE, A. DE, BUREN, J. VAN, KÖSTERS, A., MAREL, H. VAN DER, De geodetische referentiestelsels van Nederland. Definitie en vastlegging van ETRS89, RD en NAP en hun onderlinge relaties, Nederlandse Commissie voor Geodesie, nr. 43, Delft, 2005.
5. CROMBAGHS, M., BRUIJNE A. DE, NLGEO2004. Een nieuw geoidemodel voor Nederland, RWS AGI, Delft, november 2004
6. HARSSON, B.G., The transformation between ED50 and WGS84 for exploration purposes in the North Sea, Statens Kartverk, Hønefoss, Noorwegen, nr. 1, 1990.
7. HEISKANEN, W.A., MORITZ, H., Physical Geodesy, Freeman, 1967.
8. HERREWEGEN, M. VAN DER, Referentiesystemen en transformatieformules in gebruik in België, Nationaal Geografisch Instituut, Brussel, 1989.
9. HTW – Handleiding voor de Technische Werkzaamheden van het Kadaster, Kadaster, Apeldoorn 1996.
10. HEUVELINK, H.J., De stereografische kaartprojectie en hare toepassing bij de Rijksdriehoeksmeting, Rijkscommissie voor Graadmeting en Waterpassing, Delft, 1918.
11. HUSTI, G.J., Deflections of the vertical in the Netherlands from geodetic astronomical observations, Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series, Delft, 1978.
12. KAARTPROJECTIES, Verslag van de Studiedagen 1968, Kartografische Sectie van het Koninklijk Nederlands Aardrijkskundig Genootschap.
13. MAREL, H. VAN DER, De plaats van RD en NAP in Europa, NGT Geodesia, september 2000.
14. MIN, E.J. DE, De geoïde voor Nederland, Nederlandse Commissie voor Geodesie, nr. 34, Delft 1996.
15. MIN, E.J. DE, LORENZ, G.K., PLUGERS, P., VAN REE, R.E., STRANG VAN HEES, G.L., Zwaartekrachtmetingen in Nederland, NGT Geodesia, februari 1993.
16. MORITZ, H., Geodetic Reference System 1980, Bulletin Géoésique 1980, vol. 54, nr. 3 en vol. 66 nr. 2, 1990.
17. SALZMANN, M.A., BUREN, J. VAN, LOBÉ, G.J.I.M., De Rijksdriehoeksmeting sluit aan op Europa, NGT Geodesia, september 2000, pp. 395-403.

18. SCHREUTELKAMP, F.H., STRANG VAN HEES, G.L., Benaderingsformules voor de transformatie tussen RD- en WGS84-kaartcoördinaten, NGT Geodesia, februari 2001, pp. 64-69.
19. SCHUT, T.G., Transformatie parameters voor RD naar WGS84, GPS Nieuwsbrief, Nederlandse Commissie voor Geodesie, Delft, oktober 1991.
20. SCHUT, T.G., De transformatie van rechthoekige RD-coördinaten naar geografische coördinaten op de ellipsoïde van Bessel, NGT Geodesia, juni 1992.
21. SCHÖDLBAUER, A., Rechenformeln und Rechenbeispielen zur Landesvermessung, Teil 1, 2, 3, 1984.
22. STRANG VAN HEES, G.L., De invloed van de zwaartekracht op de hoogtemeting, NGT Geodesia, april 1980.
23. STRANG VAN HEES, G.L., Methode Bowring voor de berekening van de breedte ϕ uit rechthoekige coördinaten (x , y , z). NGT Geodesia, 1993-7.
24. STRANG VAN HEES, G.L., Practical formulas for the computation of the orthometric, dynamic and normal heights, Zeitschrift für Vermessungswesen, november 1992.
25. TECHNISCHE ANLEITUNG TA-VERM-10, Affine transformation von Gauss Krüger Koordinaten in UTM-Koordinaten für das Gebiet der Bundesrepublik Deutschland, Milgeoamt, Bad Godesberg, 1973.
26. WAALEWIJN, A. (RED.), Drie eeuwen Normaal Amsterdams Peil, Meetkundige Dienst van de Rijkswaterstaat, 1986.
27. WEELE, P.I. VAN DER, De geschiedenis van het NAP, Rijkscommissie voor Geodesie, Delft, 1971.
28. WORLD GEODETIC SYSTEM 1984, Its definition and relationship with local geodetic systems, Defence Mapping Agency, TR8350.2, 1987.
29. WILLIGEN, G.W. VAN, De berekening van de gravimetrische geöïde van Nederland, afstudeerscriptie, Delft, 1985.