

## 5 Andere beschikbare databestanden

Zoals al in hoofdstuk 2 duidelijk is geworden, is meer zwaartekrachtinformatie nodig om een goede lokale of regionale geoïde te bepalen dan de binnengebieddata die is behandeld in hoofdstuk 3. Deze andere data zijn geopotentialcoëfficiënten. Daarnaast zijn ook nog data beschikbaar die een verbetering of controle van de gravimetrische geoïde kunnen geven. Uit beschikbare GPS metingen en waterpasresultaten, kunnen geoïdehoogten worden berekend en die kunnen worden gebruikt als controle voor de gravimetrisch berekende geoïdehoogten. Verder zijn er schietloodafwijkingen beschikbaar, die aangeven wat de helling van de geoïde in een punt is. Deze onafhankelijke geoïde-informatie kan worden gebruikt ter controle en verbetering van de gravimetrische geoïde, wat in de hoofdstukken 6 en 8 zal worden getoond.

### 5.1 Geopotentialmodellen

De geopotentialmodellen die momenteel ter beschikking staan kunnen worden onderverdeeld in 3 categorieën.

- puur satelliet (bijvoorbeeld JGM-1S, GRIM-S)
- gecombineerd (bijvoorbeeld JGM-1, GRIM-C, GEM-T2)
- hoge resolutie geopotentialmodellen (bijvoorbeeld OSU81, OSU89, OSU91, GFZ93A)

De modellen die staan genoemd tussen haakjes zijn voorbeelden, er zijn nog meer modellen beschikbaar. De eerste categorie betreft modellen die zijn berekend op basis van alleen metingen van satellietbanen. Door het meten van satellietbaanafwijkingen kunnen alleen coëfficiënten van lage graad  $n$  worden bepaald, wat kan worden begrepen uit de term  $\left(\frac{R}{r}\right)^n$  in (A.8). Volgens (Seeber, 1993) lukt dat tot ongeveer graad 20. Omdat met alleen satellietbaanalyses de bolfunctiecoëfficiënten slechts tot lage graad en orde goed kunnen worden bepaald, wordt zwaartekrachtinformatie die is gemeten aan het aardoppervlak toegevoegd om meer coëfficiënten beter te kunnen bepalen. Hiervoor worden bijvoorbeeld  $1^\circ \times 1^\circ$  gemiddelde waarden gebruikt. Op basis van deze gecombineerde data worden modellen berekend tot een maximale graad en orde 50, zoals bijvoorbeeld GRIM-C. De kleinste golflengte die wordt beschreven door deze modellen is ongeveer 800 km.

Omdat alle golflengten in het zwaartekrachtssignaal kleiner dan 800 km niet worden beschreven door zulke modellen, worden ook hoge resolutie geopotentialmodellen berekend. Deze modellen hebben harmonische coëfficiënten tot een maximale graad en orde 360. Dat betekent een kleinste golflengte van ruim 100 km. Met hoge resolutie bedoelt men dus hoge resolutie voor een globaal geopotentialmodel, aangezien de lokale modellering voor een veel hogere resolutie gebeurt (0.1-10 km). De bekendste van zulke

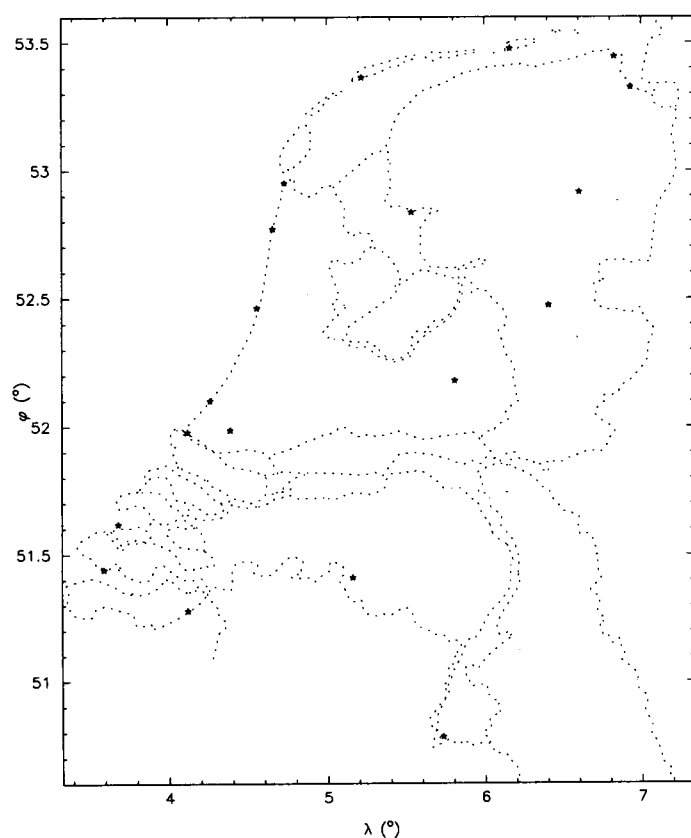
modellen zijn berekend aan Ohio State University in de Verenigde Staten van Amerika. Het meest recente model is OSU91A (Rapp e.a., 1991). Dit model is berekend op basis van de geopotentiala coefficients van GEM-T2, in combinatie met  $0.5^\circ \times 0.5^\circ$  gemiddelde waarden op het aardoppervlak. Deze gemiddelde waarden zijn verkregen uit land- en zeezwaartekrachtmetingen, en uit radarhoogte-metingen vanuit altimetersatellieten. In de gehanteerde berekeningsprocedure worden eerst alle coefficients met hun standaardafwijking tot en met graad en orde 50 bepaald uit de gemiddelde blokwaarden, welke vervolgens via een gewogen gemiddelde met de coefficients van het GEM-T2 model de coefficients tot en met graad 50 van OSU91A opleveren. Vervolgens worden alle coefficients voor de graden  $n = 51, 360$  bepaald met een numerieke integratie van (A.2). De werkelijke methode is iets ingewikkelder, maar hiermee wordt wel het idee aangegeven van de manier van berekening. De zwaartekrachtdata worden eerst gecontroleerd op fouten en allemaal in hetzelfde referentiesysteem gebracht, waarna correcties worden aangebracht voor atmosfeeraantrekking (zie ook hoofdstuk 7) en verwaarlozing van hogere-orde termen van de normaalzwaartekracht. Verder worden er correctietermen berekend en aangebracht, die corrigeren voor de sferische benadering die nodig is om de Stokes integraal oplossing te verkrijgen. Hierop wordt verder ingegaan in hoofdstuk 7. De berekening van de coefficients vindt plaats in een iteratief proces, waarbij de gewichten voor de verschillende data worden *getuned*, zodanig dat wordt verwacht dat optimale resultaten worden verkregen. Bij de berekening wordt voor alle coefficients een standaardafwijking berekend. De correlaties tussen de standaardafwijkingen worden niet berekend, om rekentechnische redenen. Er zijn bijna 130000 coefficients voor een 360-model, zodat de dimensie van zo'n covariantiematrix ook bijna 130000 is. Dat zijn bijna 8.5 miljard covariantiewaarden.

Uiteindelijk zijn de bepaalde geopotentiala coefficients vergeleken met onafhankelijke zwaartekrachtinformatie (zoals satellietbanen, Doppler metingen en GPS-metingen), om een indruk te krijgen hoe goed het model is en of de precisiemaat realistisch is. Daarbij wordt het altijd duidelijk dat betere resultaten worden bereikt voor gebieden waar goede invoer-zwaartekrachtwaarden zijn gegeven, dan voor gebieden waar de beschikbare data niet zo goed zijn (met name delen van de voormalige Sovjet-Unie en Zuid-Amerika). Uit een vergelijking met niet voor het model gebruikte altimetermetingen blijkt de overeenkomst een flink stuk beter te zijn dan met het vorige OSU89B model. De procedure wordt in detail beschreven door (Rapp&Pavlis, 1990).

## 5.2 Overige relevante databestanden

Alle data die nodig zijn om een combinatie geoid-oplossing te berekenen zijn nu behandeld. Er is echter nog meer informatie beschikbaar die iets vertelt over de geoid. Het betreft drie verschillende soorten gegevens. De eerste dataset bestaat uit GPS-hoogteverschillen, die zijn uitgerekend ten opzichte van de WGS84-ellipsoïde. Door de orthometrische hoogteverschillen van de GPS-hoogteverschillen af te trekken, blijven geoidverschillen over (zie figuur 1.2). Deze geoidverschillen kunnen worden vergeleken met de gravimetrische geoidverschillen. De geoidhoogteverschillen uit GPS en waterpassen zijn gegeven ten opzichte van WGS84, de gravimetrische geoidhoogten zijn berekend ten opzichte van GRS80. De vormparameters van deze twee ellipsoïden is ge-

lijk (Kumar, 1988), en er kan van worden uitgegaan dat ze ook samenvallen. Er is dus geen coördinaattransformatie nodig voor één van beide geoidmodellen. In Nederland zijn twee datasets beschikbaar met goede GPS-resultaten. Beide datasets zijn metingen die zijn verricht op het NEREF-Mareo netwerk. De eerste dataset is gemeten in 1991 en verwerkt bij de afdeling Rijksdriehoeksmeting met het Trimvec-verwerkingspakket (Van Buren, 1991). De precisie van de hoogteverschillen wordt geschat op 3 cm. Er is geen variantie-covariantiematrix van de coördinaatverschillen beschikbaar. In 1994 is opnieuw gemeten op de NEREF-Mareo punten, met als één van de doeleinden de controle en verbetering van de nieuwe gravimetrische geöide. Ditmaal is gemeten met nieuwe en betere ontvangers, Trimble SSE twee-frequenties ontvangers, en tevens was de satelliet-configuratie beter dan in 1991. De verwerking is gedaan door de Meetkundige Dienst van de Rijkswaterstaat met behulp van de Bernse software (Zomerdijk&Molendijk, 1995). De vereffening van de basislijnen heeft plaats gevonden met het geavanceerde vereffeningpakket SCAN3, waarbij een pseudo-kleinste-kwadraten aansluiting aan de ETRF92-coördinaten in ETRS89 van de punten Onsola, Kootwijk en Wettzell is uitgevoerd. De precisie van de hoogteverschillen uit deze campagne, mede gebaseerd op herhaalbaarheid van verschillende sessies, wordt geschat op 2-3 cm. Uit SCAN3 is een volledige variantie-covariantiematrix beschikbaar voor de 22 punten, waarvan er 19 in Nederland liggen. De standaardafwijking van de waterpashoogteverschillen is enkele mm's zodat de precisie van de geöidehoogteverschillen uit GPS en waterpassen gelijk



**Figuur 5.1** 19 GPS-waterpas geöidehoogtepunten in Nederland.

kan worden genomen aan de GPS-precisie. Figuur 5.1 geeft aan waar de NEREF-Mareo punten zich bevinden in Nederland. Door de bedekking van heel Nederland kan een controle van grote golflengten worden gedaan.

Naast deze GPS/waterpas datasets met punten in heel Nederland, is ook een bestand beschikbaar gesteld door de NAM, met 37 punten in een gebied van ongeveer 50x70 km<sup>2</sup> in Groningen. De kwaliteit hiervan is bedraagt ongeveer 0.5-1 cm, en deze punten bieden de mogelijkheid om de geöideverschillen die hiermee zijn bepaald te vergelijken met het oude en het nieuwe geoidemodel voor Nederland. Door de korte afstanden tussen de punten kunnen hiermee de kleine golflengten worden vergeleken.

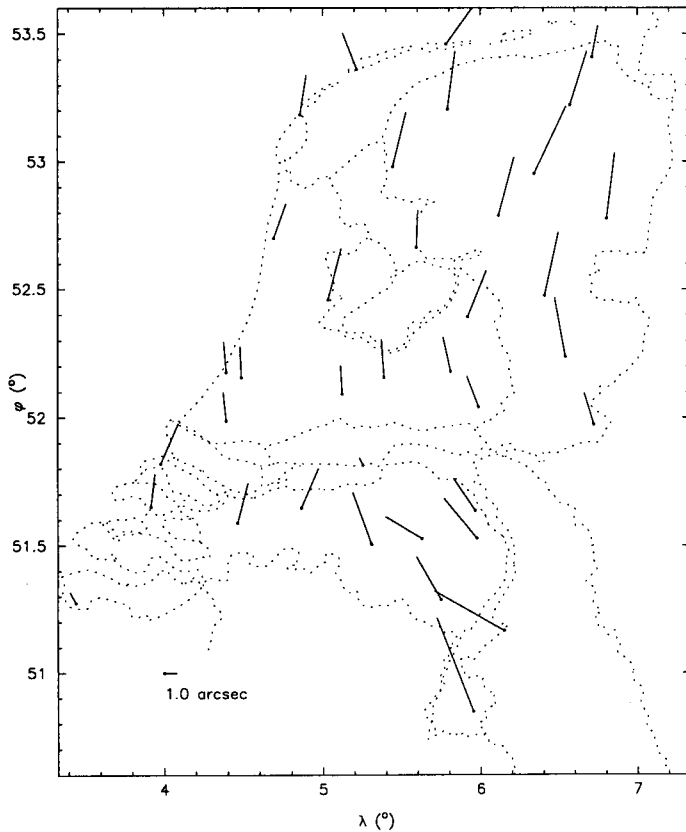
De tweede soort beschikbare data die geöide-informatie bevat zijn schietloodafwijkingen. Deze kunnen voor een enkel punt worden bepaald door metingen te verrichten naar sterren, waarmee de astronomische positiecoördinaten  $\Phi$  en  $\Lambda$  kunnen worden bepaald. De verschillen van de astronomische coördinaten met de ellipsoïdische coördinaten van hetzelfde punt zijn de schietloodafwijkingen,  $\xi$  en  $\eta$  in respectievelijk  $\varphi$  en  $\lambda$ -richting. De relatie van de schietloodafwijkingen met de geöidehoogten wordt beschreven door (Heiskanen&Moritz, 1967)

$$\xi = -\frac{\partial N}{R \partial \varphi} \quad (5.1)$$

$$\eta = -\frac{\partial N}{R \cos \varphi \partial \lambda} \quad (5.2)$$

De schietloodafwijkingen geven aan wat de helling van de geöide is in het betreffende punt. Ze kunnen een controle geven op de helling van de geöide. In Nederland zijn voor 36 punten de schietloodafwijkingen gegeven. Daarvan staan er 32 beschreven in (Husti, 1975) en (Husti, 1978). De standaardafwijkingen van de schietloodafwijkingen is  $\sigma_\xi = 0.2''$ , en  $\sigma_\eta = 0.3''$  ( $\approx 1 \text{ ppm} = 1 \text{ cm}/10 \text{ km} = 10 \text{ cm}/100 \text{ km}$ ). Daarnaast zijn door (Schreutelkamp&De Graaff, 1995) enkele schietloodafwijkingen berekend op basis van oude metingen en beschikbaar gesteld voor vergelijking met de geöide. Hieronder bevinden zich ook de 13 noord-zuid-componenten  $\xi$  die begin deze eeuw zijn gemeten en zijn gebruikt voor de definitie van het Bessel-referentiesysteem in Nederland (zie Heuvelink, 1918). De standaardafwijking van deze metingen is ongeveer 0.1". Voor de plaatsen waar zowel begin deze eeuw als door Husti is gemeten, is de waarde van Oudemans gebruikt voor de astronomische breedte. Dit is voor 7 punten het geval. De verschillen tussen de twee waarden zijn binnen de opgegeven precisiematen. De posities waar de schietloodafwijkingen zijn gemeten worden gegeven in figuur 5.2, waarin ook de waarde van de schietloodafwijkingen is weergegeven. Deze schietloodafwijkingen zijn berekend in WGS84. Door de beperkte precisie over lange afstanden bieden de schietloodafwijkingen vooral een controle op de hoge frequenties van de geöide.

In hoofdstuk 6 zullen verschillende gravimetrische geöidemodellen (gebaseerd op verschillende kernfunctiemodificaties) worden vergeleken met de GPS-resultaten en de schietloodafwijkingen. In hoofdstuk 8 zal de definitieve gravimetrische geöide voor Nederland worden berekend en daarna worden verbeterd met deze externe geöide-informatie.



**Figuur 5.2** Schietloodafwijkingen in Nederland (") ten opzichte van WGS84. De punt geeft de positie aan, het lijntje de richting. De lengteschaal wordt linksonderin aangegeven.

Tenslotte zijn er nog geïdemodellen beschikbaar die vroeger zijn berekend. Natuurlijk is er de vorige geïde voor Nederland, die is berekend door Van Willigen (1985). En verder is een geïdemodel voor Duitsland beschikbaar dat is berekend in 1988 (Denker, 1989) en dat voor het grensgebied met Nederland ook geïdehoogten geeft. Vergelijkingen hiermee van de nieuwe gravimetrische geïde zullen worden gedaan in hoofdstuk 8.

### 5.3 Topografie

Hoogfrequent zwaartekrachtssignaal (zwaartekrachtvariaties) is sterk gecorreleerd met topografievariaties. Als op een punt in bergachtig gebied een zwaartekrachtwaarde wordt gemeten, dan zal deze waarde niet representatief zijn voor een groter omliggend gebied. Als de topografievariaties een grote amplitude hebben, zal er op de overeenkomstige golflengten van het zwaartekrachtssignaal ook een aanzienlijke amplitude gelden, die een significante bijdrage aan de geïde kan opleveren (enkele cm). Men zou dan een zeer dicht zwaartekrachtmetnet moeten meten om deze frequenties goed te kunnen beschrijven en geen aliasingeffecten te krijgen. Omdat dit duur en tijdrovend is, wordt in de praktijk een andere oplossing toegepast. Met behulp van een digitaal terrein

model (DTM) wordt uitgerekend wat het zwaartekrachteffect is van de hoogfrequente topografie. Dit effect wordt van de metingen afgetrokken, waardoor alleen grotere golf-lengten in de zwaartekrachtanomalieën overblijven, welke wel representatief zijn voor grotere gebieden. Op basis hiervan kan worden geïnterpoleerd en gemiddelde blokwaarden worden berekend. Het aliasingprobleem is hiermee opgelost. Als de hoogfrequente topografie een grote amplitude heeft dient men ook nog de bijdrage aan de geoïde hiervan te berekenen. Dit is eenvoudig mogelijk en met een klein integratiegebied van bijvoorbeeld 20 km is deze bijdrage te berekenen. In de literatuur wordt vaak een integratiegebied tot 167 km van het berekeningspunt gebruikt (Vermeer, 1992). Dit is echter niet nodig als een goed en dicht zwaartekracht-net beschikbaar is.

In de fysieke geodesie is de berekening van de topografie-effecten op zwaartekracht en geoïde een belangrijk onderzoeksterrein, waar de laatste jaren veel aandacht aan is besteed. Voor cm-geoïdeprecisie vraagt dit ook om een degelijke aanpak. De procedures die tegenwoordig standaard wordt toegepast zijn ontwikkeld door (Forsberg&Tschering, 1981). Veel aandacht wordt besteed aan het gebruik van Fouriertechnieken (Schwarz e.a., 1990), omdat met zeer grote hoeveelheden data moet worden gewerkt. Vaak zijn DTM's beschikbaar met een resolutie van 100 m, voor gebieden van enkele honderden kilometers groot. Daarbij worden doorgaans benaderingen geïntroduceerd om met FFT te kunnen werken, en gaat men wel eens voorbij aan het eigenlijke doel, het zo goed mogelijk bepalen van de geoïde.

Voor Nederland is dit onderwerp niet van belang door het ontbreken van significante hoogtevariatiën in en rondom Nederland, en wordt daarom ook niet behandeld in dit verslag. Voor bijvoorbeeld Duitsland kunnen de topografievariatiën maximale geoïde-effecten van 17 cm opleveren (Denker, 1988). Het effect van topografie zoals in Zuid-Limburg en aangrenzend België op de geoïde in dit gebied bedraagt maximaal enkele mm's.

## 6 Geoïdeberekening: tests

In hoofdstuk 2 is aangegeven dat er verschillende methoden bestaan om de geoïde te berekenen. Enerzijds zijn er verschillende kernfuncties die kunnen worden gebruikt, anderzijds bestaan er verschillende evaluatietechnieken die de binnengebied-geoïdebijdrage opleveren. In hoofdstuk 4 is bekeken hoe gemiddelde zwaartekrancht-anomalieën kunnen worden bepaald. Daarbij kwam naar voren dat bijvoorbeeld verschillende interpolatiemethoden kunnen worden toegepast en dat verschillende steungebieden mogelijk zijn, die verschillen in de resultaten kunnen opleveren.

In dit hoofdstuk zal worden gekeken naar de invloed op de geoïde van deze verschillen in methoden en verschillen in gemiddelde blokwaarden. Tevens zullen de verschillende gravimetrische geoïdebepalingen (met behulp van verschillende kernfuncties) worden vergeleken met de onafhankelijke geoïde-informatie, die wordt geleverd door de GPS- en waterpasmetingen en de schietloodafwijkingen.

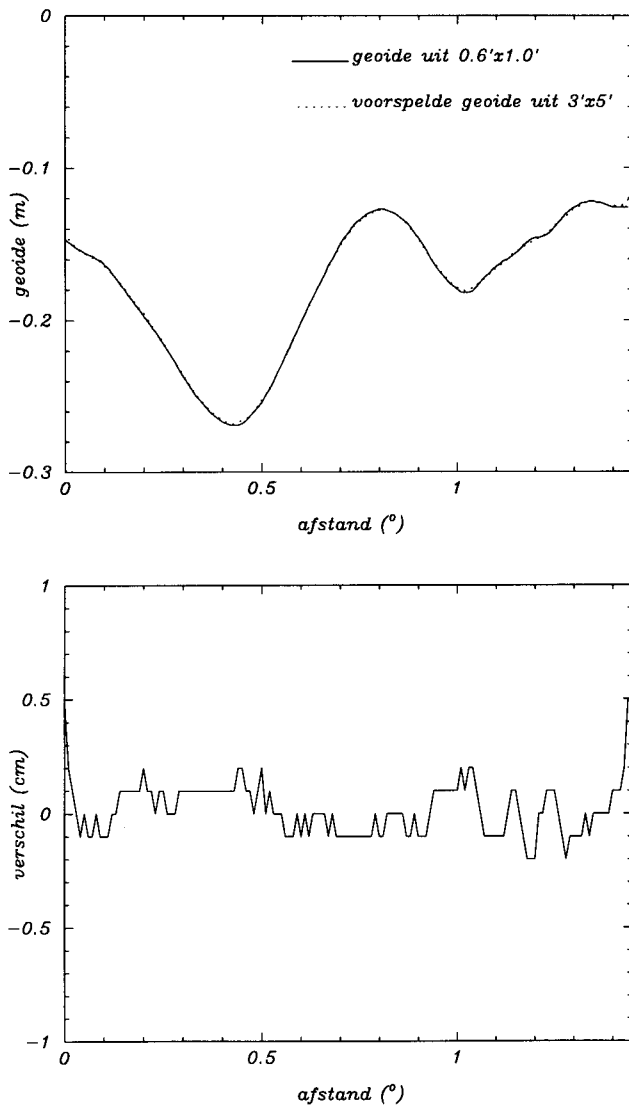
### 6.1 Geoïdeberekeningspunten bij numerieke integratie

Bij numerieke integratie wordt een discretisatiefout gemaakt, die bij collocatie niet ontstaat. Deze fout, die mede afhangt van de positie van het gekozen geoïdeberekeningspunt, worden in deze paragraaf aan de hand van een voorbeeld beschreven.

#### Discretisatiefout

In paragraaf 2.5 is uitgelegd wat de discretisatiefout is, en hoe hij ontstaat. In deze paragraaf wordt een numeriek voorbeeld gegeven op basis van de nieuwe Nederlandse zwaartekrachtdataset. Op basis van de puntdata in de nieuwe Nederlandse dataset zijn gemiddelde blokwaarden berekend voor blokgebieden van  $3' \times 5'$  en voor blokgebieden van  $0.6' \times 1.0'$  (ongeveer  $1 \times 1 \text{ km}^2$ ). Op basis van de  $3' \times 5'$  blokwaarden is een  $3' \times 5'$  geoïdegrid uitgerekend. Met dit  $3' \times 5'$  geoïdegrid is middels kleinste-kwadraten predictie een  $0.6' \times 1.0'$  geoïdegrid rechtstreeks uitgerekend. Op basis van de  $0.6' \times 1.0'$  zwaartekrachtblokwaarden is ook een  $0.6' \times 1.0'$  geoïdegrid uitgerekend. De gemiddelde waarde en de rms-waarde van de verschillen tussen de twee grids bedragen respectievelijk 1 mm en 2 mm. De grootste verschillen die tussen deze twee grids worden gevonden zijn 6 mm. Figuur 6.1 laat de twee geoïderesultaten en de verschillen zien voor een lijn uit het grid, nl.  $\varphi = 53.005^\circ$ .

Als er daadwerkelijk hoogfrequente informatie in het zwaartekracht signaal voorkomt, kan bij de bepaling van kleine blokken een enkel zwaartekranchtpunt doorslaggevend zijn. Er ontstaat dan ook een hoogfrequent geoïdesignaal. Worden grotere blokken berekend, dan wordt het hoogfrequente signaal weggemiddeld, en zullen deze frequenties ook niet in de berekende geoïde voorkomen. Een hoge frequentie in het zwaartekrancht signaal kan ook een meetfout in een enkel punt zijn. Omdat we dit effect niet lokaal in



**Figuur 6.1** Voorbeeld van discretisatiefout. Het bovenste plaatje geeft de geoïdehoogten geïnterpoleerd uit een 3'x5' grid en de geoïdehoogten uit een 0.6'x1.0' grid, in m. De onderste figuur geeft het verschil tussen deze twee, in cm.

de geoïde willen hebben, is het beter iets grotere blokgebieden te kiezen, zodat een blokwaarde wordt bepaald op basis van meerdere meetwaarden. Een blok grootte van 3'x5' voldoet hiervoor in Nederland. Deze blok grootte is klein genoeg om geen significant zwaartekrachtssignaal te verwijderen.

### Positie van de berekeningspunten

De praktische vorm van Stokes integraal (2.19) kan in principe worden toegepast voor elk willekeurig geoïdeberekeningspunt  $P$ . Maar het is beter om de formule alleen te gebruiken voor geoïdeberekeningspunten die precies in het midden van de blokgebieden liggen. Het zal namelijk meestal zo zijn dat het verschil tussen de gemiddelde zwaarte-



krachtanomalieën (het bloksignaal) en de echte zwaartekrachtanomalieën, wat een glad signaal is (zonder plotselinge overgangen, zoals het bloksignaal), het kleinst is in het midden van het blokgebied en het grootst aan de randen van het blokgebied (zie ook paragraaf 2.5). Als de geoïdeberekeningspunten vlak bij de rand van de blokgebieden worden gekozen, dan zullen deze verschillen een relatief groot effect hebben. Het eigenlijke zwaartekrachtssignaal is glad, en dus de geoïde ook. Men kan daarom beter op basis van de berekende geoïdehoogten in de middelpunten van de blokgebieden interpoleren naar de punten waar de geoïdehoogten gewenst zijn.

Voor Nederland is voor een testgebied berekend wat de maximale waarde is van dit effect. Het blijkt dat deze enkele mm bedraagt, zodat het geen probleem zou zijn om willekeurige geoïdeberekeningspunten te kiezen. De discretisatiefout bedraagt ook enkele mm's (zie hierboven). Op basis van een 3'x5' geoïdegrid kan voldoende nauwkeurig voor elk willekeurig punt de geoïde worden berekend. Dit is veel gemakkelijker dan te voorspellen uit een heel dicht grid, of door voor elk gewenst geoïdeberekeningspunt (2.19) toe te passen.

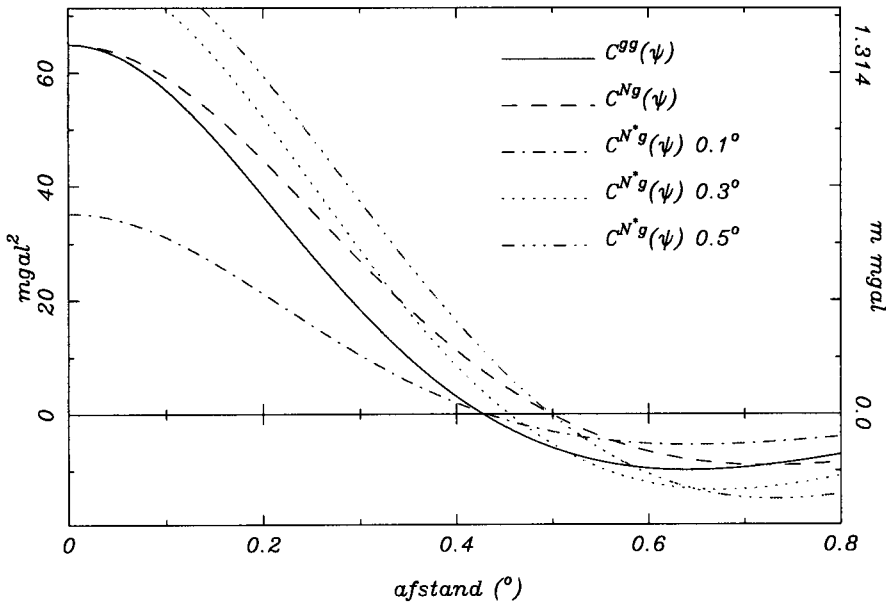
## 6.2 Verschillende methoden voor geoïdeberekening

In hoofdstuk 2 zijn verschillende methoden beschreven die kunnen worden toegepast om de gravimetrische geoïde te bepalen. Daarbij is al getoond dat de resultaten niet altijd hetzelfde zullen zijn. De verschillen hangen met name af van hoe de beschikbare gegevens worden gebruikt. Bij verschillend gebruik zal een verschillend resultaat worden bereikt, doorgaans ook met een andere formele fout. In deze paragraaf zullen voorbeelden worden gegeven van de overeenkomsten en verschillen van de drie methoden om de binnengebiedbijdrage te berekenen, numerieke integratie over blokwaarden of punten en collocatie. Vervolgens worden de verschillen bepaald van de geoidmodellen die zijn berekend met verschillende kernfuncties, die elk een ander gebruik van de geopotentialdata en de binnengebieddata tot gevolg hebben.

### 6.2.1 Consistentie numerieke integratie over blokken of punten en collocatie

In paragraaf 2.3 zijn de drie methoden beschreven die kunnen worden toegepast om de geoïdebijdrage van de binnengebiedzwaartekrachtdata te berekenen. De twee numerieke integratiemethoden zouden in theorie vergelijkbare resultaten moeten opleveren, afgezien van hoogfrequente verschillen. Sommatie en collocatie leveren niet hetzelfde resultaat op. In 2.3.4 is aangetoond dat bij collocatie impliciet een extrapolatie in het buitengebied wordt uitgevoerd, en dat de geoïdebijdrage van het geëxtrapoleerde zwaartekrachtssignaal wordt meegenomen.

In 2.3 is ook beschreven hoe de collocatieformule kan worden veranderd, zodanig dat een identiek integratiegebied (het binnengebied) als bij numerieke integratie wordt aangehouden. De verschillen zouden dan op het niveau van de discretisatiefout moeten zijn.



**Figuur 6.2** Auto- en kruiscovariantiesfuncties van zwaartekranchanomalieën en geoidhoogten-zwaartekranchanomalieën. Zowel voor gewone collocatie als de gemodificeerde collocatiemethode.

In deze paragraaf wordt eerst het verschil tussen numerieke integratie en collocatie bekeken. In verband met de rekenintensiteit van collocatie is met een beperkt gebied met daarin slechts een deel van de totale data een testberekening uitgevoerd. Voor het gebied van  $51.5^\circ < \varphi < 52.5^\circ$  en  $4.0^\circ < \lambda < 5.5^\circ$  zijn gemiddelde blokwaarden van  $3' \times 5'$  berekend. Hiermee is de geoid bepaald met numerieke integratie over blokken (2.19). Er is een binnengebied van  $0.5^\circ$  gebruikt. Op basis van dezelfde gemiddelde waarden is met de gewone collocatieformule (2.38) de geoidbijdrage berekend. Tevens is met de gemodificeerde collocatieformule (2.43) de geoid bepaald. De signaalcovariantiefunctie die is gebruikt is die, die volgt uit de graadvarianties die zijn bepaald in paragraaf 4.5, en weergegeven in figuur 4.11. Op basis van deze signaalgraadvarianties van de zwaartekranchanomalieën, zijn de autocovariantiefunctie van zwaartekranchanomalieën en de kruiscovariantiefuncties tussen geoiden en zwaartekranchanomalieën (A.18) en (2.44) bepaald. Deze covariantiefuncties staan weergegeven in figuur 6.2.

Als één geoidberekeningspunt  $P$  wordt beschouwd, dan krijgen bij elk van de binnengebied-geoidberekeningsmethoden alle blokwaarden een bepaald gewicht. Bij de Stokes numerieke integratie over blokken worden deze gewichten beschreven door (2.23). Bij de twee collocatieformules (met en zonder buitengebiedbijdrage) worden deze gewichten beschreven door

$$w_i^{Col} = \sum_{i'=1}^n \left( (C^{gg})^{-1} \right)_{i i'} C_{i'}^{Ng}, \quad (6.1)$$

en

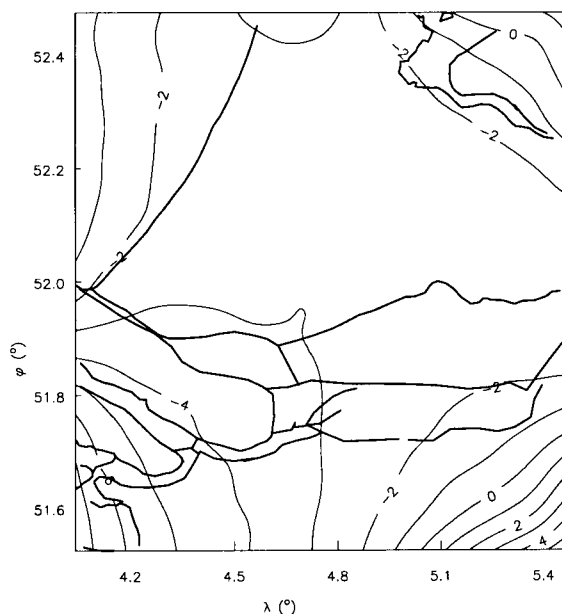
$$w_i^{Col*} = \sum_{i'=1}^n \left( (C^{gg})^{-1} \right)_{i i'} C_{i'}^{N*g}. \quad (6.2)$$

Op het eerste gezicht zou worden verwacht dat de gewichten van Stokes numerieke integratie en van collocatie gelijk zijn, omdat beide methoden volgen uit de continue Stokes integraal. Dit geldt echter alleen als de beide methoden worden toegepast op data die wereldwijd beschikbaar zijn, zoals is beschreven in paragraaf 2.3. Door de bijdrage van het geëxtrapoleerde signaal zullen de gewichten bij collocatie (6.1) anders zijn dan bij Stokes numerieke integratie (2.23). Door de aanpassing van de kruiscovariantiefunctie in de gemodificeerde collocatieformule wordt hetzelfde integratiegebied aangehouden als bij numerieke integratie. Verwacht wordt dat dan dezelfde gewichten worden toegekend aan de gebruikte blokwaarden als bij numerieke integratie. Dus (2.23) en (6.2) moeten overeenkomen. In tabel 6.1 worden de verhoudingen van deze gewichten gegeven. De gewichten voor de blokwaarden waarin het geoïdeberekeningspunt zich bevindt staan linksboven. De gewichten van de andere blokken staan getabelleerd volgens hun relatieve positie ten opzichte van dit geoïdeberekeningspunt. Slechts een kwart van de blokken is gegeven omdat de gewichten alleen van de afstand afhangen en gelijk zijn voor de andere richtingen.

Uit tabel 6.1 blijkt dat de gewichten van de Stokes numerieke integratie en de gewichten van de gewone collocatieformule inderdaad verschillen. Blokwaarden die nog dicht bij het berekeningspunt liggen (bijvoorbeeld 3 blokgrootten weg) krijgen bij collocatie een gewicht dat slechts 60% is van het Stokes numerieke integratiegewicht. Voor grotere afstanden worden de gewichtratos snel kleiner. De blokwaarden aan de rand van het binnengebied krijgen juist een groter gewicht dan bij Stokes numerieke integratie. Dit verschil in het gewicht aan de rand bedraagt ongeveer een factor 2. Dit komt doordat deze blokwaarden aan de rand een belangrijke rol spelen bij de berekening van de geëxtrapoleerde waarden in het buitengebied. De totale bijdrage van de geëxtrapoleerde waarden is relatief groot (door een grote oppervlakte), wat zich uit in de grote gewichten aan de rand.

**Tabel 6.1** Ratios van gewichten voor  $\psi_0 = 0.5^\circ$ . Het linker deel geeft  $w_i^{Col}/w_i^{St}$ , het rechter deel geeft  $w_i^{Col^*}/w_i^{St}$ . Het linksbovenpunt is het geoïdeberekeningspunt, de andere gewichtratos staan op de relatieve posities ten opzichte van het geoïdeberekeningspunt.

1.0	0.9	0.9	0.6	1.0	0.3	0.9	0.3	0.7	-0.1	1.3	1.0	1.1	0.9	1.0	1.0	0.9	1.1	1.0	1.0	1.0	1.0
0.9	1.0	0.6	1.0	0.4	0.9	0.3	0.8	0.2	0.3	1.0	1.0	1.1	0.9	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9	1.1	0.9
0.9	0.6	1.0	0.5	1.0	0.3	0.8	0.2	0.7	-0.1	1.1	0.9	0.9	1.0	0.9	1.1	0.9	1.0	1.0	1.0	1.0	0.8
0.6	1.0	0.5	1.0	0.3	0.9	0.2	0.7	0.2	0.1	2.0	1.0	1.0	0.9	1.0	0.9	1.1	1.0	1.0	1.0	1.1	0.6
0.9	0.4	1.0	0.3	0.9	0.2	0.8	0.1	0.6	0.3	1.0	1.0	1.0	0.9	1.1	0.9	1.1	0.9	1.0	1.0		
0.3	0.9	0.3	0.9	0.2	0.8	0.1	0.8	-0.6	2.2	0.9	1.0	0.9	1.1	0.9	1.1	0.9	1.1	0.9	0.9		
0.9	0.3	0.8	0.2	0.8	0.1	0.8	-0.5	1.9	1.0	1.0	1.0	0.9	1.1	0.9	1.1	0.8	1.3				
0.3	0.7	0.2	0.7	0.1	0.8	-0.5	1.9	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9	1.1	0.8	1.4						
0.7	0.2	0.7	0.2	0.6	-0.6	1.9	1.0	0.9	1.0	1.0	1.0	0.9	1.3								
-0.1	0.3	-0.1	0.1	0.3	2.2	1.0	1.1	1.0	1.1	1.0	0.9										
1.3	1.0	1.1	2.0	1.0	0.9	0.8	0.6														



**Figuur 6.3** Verschillen in geoïde tussen Stokes numerieke integratie en collocatie. In cm.

De gewichten van de gemodificeerde collocatieformule komen goed overeen met de numerieke integratiegewichten. Lokale afwijkingen van 10% komen voor doordat bij collocatie automatisch een lichte *smoothing* plaats vindt (zie de uitleg van collocatie in A.2, blz. 215). De waarden aan de rand wijken iets af doordat bij Stokes numerieke integratie altijd het hele blok wel of niet wordt meegenomen. Bij de gemodificeerde collocatieformule wordt slechts het deel van het blokgebiedje gebruikt dat werkelijk binnen het binnengebied (hier  $0.5^\circ$ ) ligt.

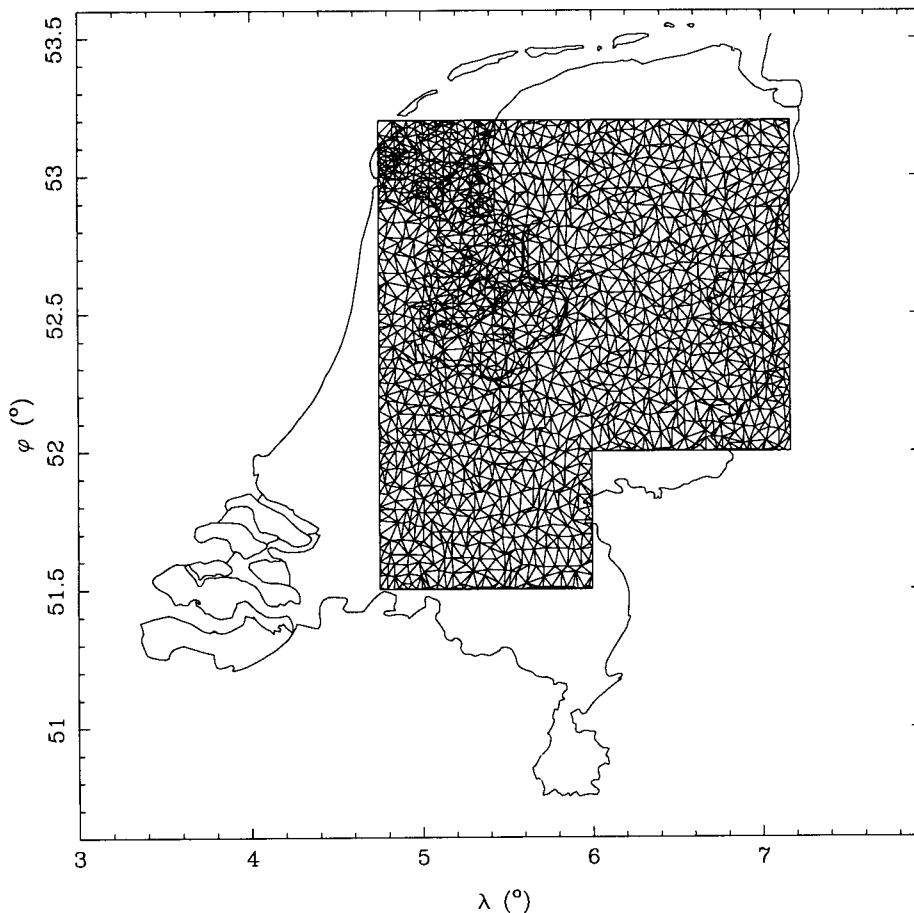
In figuur 6.3 wordt voor het testgebied het verschil gegeven van de geoïderesultaten uit Stokes numerieke integratie en gewone collocatie. De verschillen zijn langgolvig van karakter, en kunnen oplopen tot enkele cm over afstanden van 20-30 km. Dit wordt veroorzaakt doordat tot op vrij grote afstanden zwaartekrachtssignaal wordt berekend (geëxtrapoleerd) in het buitengebied, met een significante amplitude. Een zelfde plaatje met de verschillen tussen Stokes numerieke integratie en gemodificeerde collocatie wordt niet gegeven, omdat de verschillen verwaarloosbaar zijn (maximaal enkele mm).

Uit de beschrijving van de theorie in hoofdstuk 2 en de testresultaten, is duidelijk geworden dat de verschillen tussen Stokes numerieke integratie en collocatie significant zijn op het cm-niveau. De methoden zijn niet gelijk bij toepassing op een binnengebied. Er moet worden gekozen tussen deze methoden, met of zonder het meenemen van het geëxtrapoleerde signaal. Voor de berekening in Nederland is gekozen om het geëxtrapoleerde signaal niet te gebruiken. De reden hiervoor is enerzijds, dat de geëxtrapoleerde zwaartekrachtanomalieën onrealistische waarden kunnen aannemen. De blokwaarden aan de rand blijken doorslaggevend voor de extrapolatie, zie tabel 6.1, en deze zijn vaak niet goed bekend. Anderzijds kan de formele foutbeschrijving zoals die is behandeld in paragraaf 2.5 niet worden toegepast als het gebruikte binnengebied

niet cirkelvormig is en van bekende grootte.

Tot slot hierover nog een opmerking. Men zou kunnen proberen om de gewone collocatieformule te gebruiken en zo veel mogelijk overeenkomende resultaten met Stokes numerieke integratie te verkrijgen door een rand met nuldata toe te voegen aan het binnengebied. Deze nuldata zijn dan het belangrijkste voor de extrapolatie, wat voornamelijk nulsignaal zal zijn. Toch zullen er dan verschillen over blijven, zoals kan worden gezien uit de verschillen van de gewichten in tabel 6.1. Ook voor blokgebieden die niet vlak aan de rand liggen treden verschillen op in de gewichten van 10-50%.

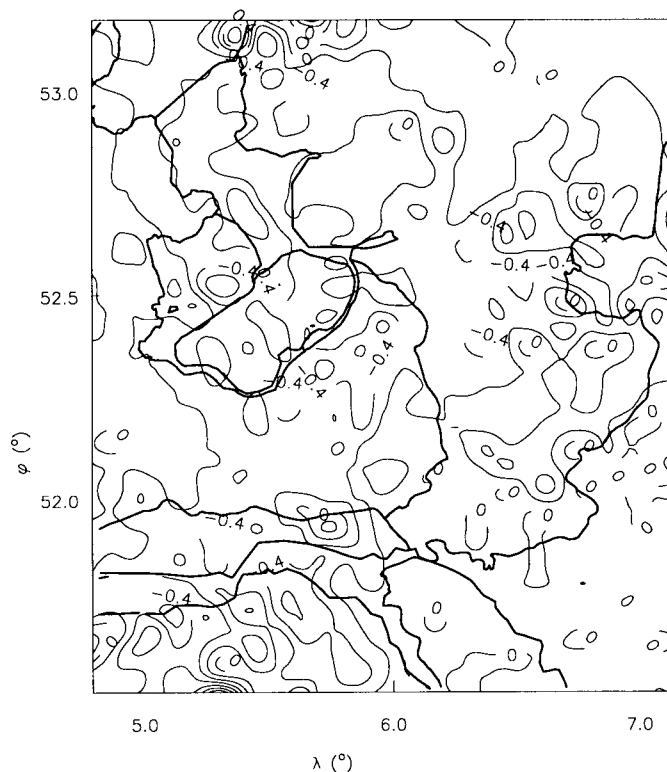
Nu zal aandacht worden besteed aan de verschillen in de geoïde uit numerieke integratie over punten en de geoïde uit numerieke integratie over blokken. Voor een groot deel van Nederland is op basis van de nieuwe Nederlandse dataset een mathematische triangulatie uitgevoerd. Er is een driehoeksnet gevormd tussen alle punten die zijn gegeven in het testgebied en de rand van het testgebied. Figuur 6.4 geeft een overzicht van dit driehoeksnet als slechts een subset van de punten is gebruikt. Dit is gedaan omdat een plaatje van de hele dataset onduidelijk zou worden. Uit figuur 6.4 blijkt de grootte van



**Figuur 6.4** *Triangulatiennetwerk in de testdataset nodig voor het toekennen van oppervlakten aan de punten.*

de driehoekjes afhangt van de lokale punt dichtheid (vergelijk bijvoorbeeld landgebied en IJsselmeer).

Op basis van deze triangulatieverbindingen tussen alle punten in de testdataset is een oppervlakte toegekend aan ieder punt. Deze oppervlakte wordt bepaald door  $1/3$  van de totale oppervlakte van alle driehoeken waarin het desbetreffende punt bijdraagt te berekenen (Rummel, 1982). Op deze manier krijgt elk punt een oppervlaktegewicht toegekend. De som van alle oppervlaktegewichten is gelijk aan de totale oppervlakte van het testgebied. Op basis van de puntwaarden en hun oppervlakte gewichten, is met (2.24) de geoid uitgerekend op een  $3' \times 5'$  grid in het testgebied. Voor dezelfde berekeningspunten is ook de geoid berekend met Stokes numerieke integratie over blokken, waarbij de gemiddelde blokwaarden zijn berekend met kleinste-kwadraten predictie en een  $0.06^\circ$ -steungebied. De verschillen in de twee geoidresultaten wordt weergegeven in figuur 6.5. Doordat het verschil bestaat uit enkele pieken van ongeveer 0.4 cm, en de rest van de verschillen ongeveer 0 is, is het plaatje niet zo eenvoudig te lezen. De statistieken van de verschillen zijn: gemiddelde -0.2 cm, rms 0.2 cm, minimum is -1.6 cm, maximum is 1.0 cm. Deze maximale verschillen komen voor aan de rand van het geoidberekeningsgebied. Over korte afstanden, twee naast elkaar liggende geoidberekeningspunten, bedraagt het verschil maximaal 0.4 cm over 5 km in het midden van het geoidberekeningsgebied en 0.7 cm over 5 km aan de rand van het geoidberekeningsgebied. De verschillen zijn dus maximaal rond een halve cm. Als de



**Figuur 6.5** Geoidverschillen door numerieke integratie over blokken en over punten. In cm, isolijneninterval is 0.2 cm.

beide geoïdeberekeningen worden vergeleken op de posities waar de grootste verschillen voorkomen, dan blijkt dat het resultaat van de numerieke integratie over blokken gladder is dan het resultaat van de numerieke integratie over punten. Dit is volgens de verwachting, want lokale maxima in de zwaartekracht kunnen ook in de geoïde een lokaal effect geven. Lokaal komen frequenties voor in het geoïderesultaat die afhangen van de lokale zwaartekracht-punt dichtheid, die hoger is dan de blok grootte en geoïde-gridafstand van 5 km. Dit komt overeen met de gevonden discretisatiefout bij gebruik van 3'x5' gemiddelde blokwaarden. Uitgaande van het 3'x5' geoïdegrid uit numerieke integratie over punten (met triangulatie) ontstaan in geïnterpoleerde geoïdehoogten fouten door aliasing. Omdat niet duidelijk is of deze uitschieters meetfouten of echt zwaartekracht signaal zijn, is het beter om met gemiddelde zwaartekracht blokwaarden te rekenen.

In Nederland wordt gebruik gemaakt van de numerieke integratie over blokken. De numerieke integratie over punten biedt geen voordelen. Voorbewerking van de puntdata is toch nog nodig (triangulatie), en bovendien lastiger dan bij blokken. Verder zijn de Stokes gewichten niet helemaal juist, door de onbekendheid van het exacte gebied waarvoor het gewicht wordt uitgerekend. En er wordt ook nog een onnodige aliasingfout gemaakt.

## 6.2.2 Kernfunctiemodificaties

In de paragrafen 2.6 en 2.7 is uitvoerig beschreven dat de twee beschikbare zwaartekracht datasets, het globale geopotentiaalmodel en de binnengebieddata, voor een deel vergelijkbare informatie bevatten.

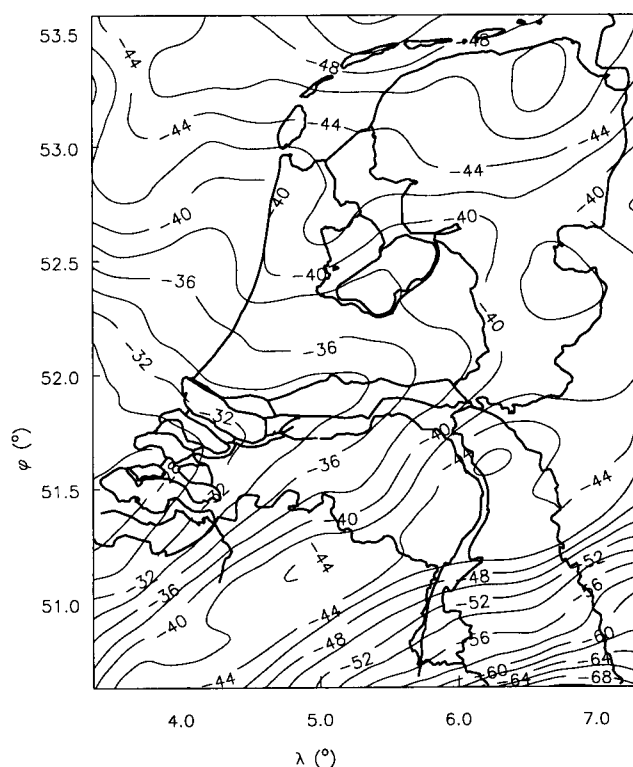
Het gebruik van deze informatie uit de ene of de andere dataset hangt af van de toegepaste kernfuncties. Er moet een keuze worden gemaakt voor de toe te passen gewichtsverdeling en bij gevolg de te gebruiken kernfunctie. De in praktijk meest gebruikte kernfunctie is de gewone Stokes kernfunctie (met Molodenskii-coëfficiënten  $Q_n$ ), die leidt tot de gewone combinatie-oplossing, zoals beschreven in paragraaf 2.2. In paragraaf 2.7 is betoogd dat een realistischer gebruik van de beschikbare data wordt gemaakt, als de Meissl kernfunctie of de gecombineerde Meissl/Wong&Gore kernfunctie met  $L = 32$  of  $L = 46$  wordt gebruikt.

Het verschil tussen de gewone combinatie-oplossing en de combinatie-oplossing met Meissl/Wong&Gore  $L = 46$ , kan worden berekend door alleen te kijken naar de  $N_2$ -bijdrage volgens methode B. Bij alle combinatie-oplossingen, die worden berekend volgens methode B, is de  $N_1$ -bijdrage namelijk gelijk (zie (2.84)). Voor het gebied in en om Nederland is met vergelijking (2.19) en de gereduceerde 3'x5' zwaartekrachtanomalieën zoals beschreven in paragraaf 4.5, de geoïdebijdrage  $N_2$  berekend met de twee kernfuncties (2.75) en (2.82). De verschillen zijn geplot in figuur 6.6.

De formele fout van het geoïderesultaat wordt beschreven in de figuren 2.11 en 2.28. Hierbij moet worden opgemerkt dat de fout van de binnengebieddata nog moet worden toegevoegd. Deze is groter bij figuur 2.11 dan bij figuur 2.28. De relatieve verschillen tussen de twee verschillende combinatie-oplossingen zijn van hetzelfde niveau als de

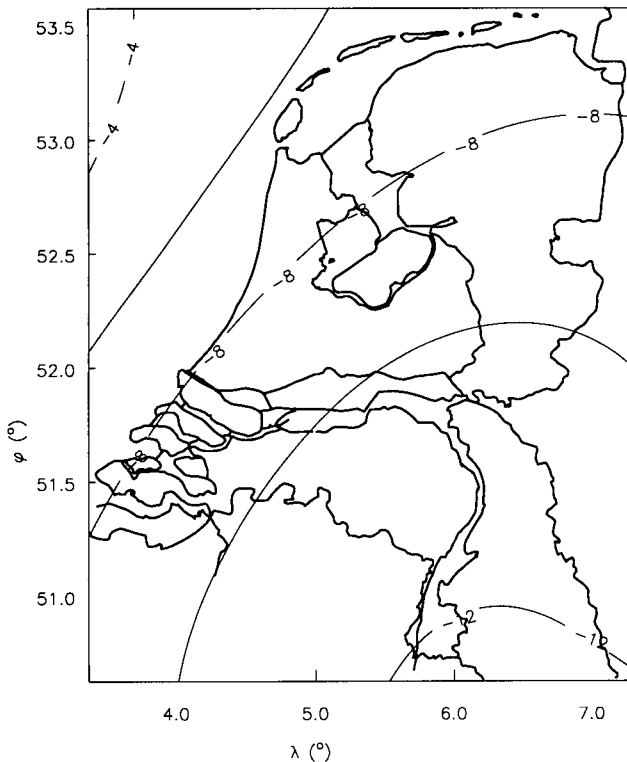
precisie van het verschil van beide oplossingen. Het verschil is significant als wordt gedacht aan cm-effecten. Het grootste deel van het verschil is langgolvig van karakter, maar ook meer lokale verschillen (4-10 cm over 60 km) komen voor. Het systematische verschil van ongeveer 40 cm valt op. De precisie van het geopotentialmodel voor een absolute geoidhoogte is ongeveer 2 dm, welke misschien wat optimistisch is. Voor een binnengebied van  $5^\circ$  kan een fout in de geoid van 40 cm worden veroorzaakt door een systematische fout in de zwaartekracht van 0.6 mgal. De gemiddelde waarde van de residue zwaartekrachtenanomalieën (zwaartekrachtenanomalieën minus OSU91A-anomalieën) is in ons datagebied 0.664 mgal. Het absolute verschil wordt dus veroorzaakt doordat bij de gewone combinatie-oplossing voornamelijk de geopotential informatie wordt gebruikt voor de grote golflengten, en bij de Meissl/Wong&Gore methode voornamelijk de binnengebieddata. Alhoewel de verschillen zeer groot te noemen zijn, is het voor ons niet zo belangrijk. Het gaat voor Nederland uiteindelijk om geoidhoogteverschillen, die mede zullen worden bepaald op basis van GPS- en waterpasmetingen. Hieruit volgt de absolute ligging van de geoid in Nederland.

Het verschil tussen de resultaten van de combinatie-oplossingen met de gecombineerde Meissl/Wong&Gore kernfunctie met respectievelijk  $L = 36$  en  $L = 46$  is ook uitgerekend. De verschillen in de spectrale gewichten, zie figuren 2.17 en 2.25, zijn hierbij veel minder groot dan met de gewone combinatie-oplossing. De verschillen komen met name



**Figuur 6.6** Geoidverschillen van de gewone combinatie-oplossing en de Meissl/Wong&Gore  $L = 46$  combinatie-oplossing. In cm, isolijnen-interval is 2 cm.





**Figuur 6.7** *Geoïdeverschillen van de Meissl/Wong&Gore  $L = 36$  en  $L = 46$  combinatie-oplossingen. In cm, isolijneninterval is 2 cm.*

voor in het spectrale gebied  $n = 30 - 50$ , en het verschil zal vrij langgolvig van karakter zijn. De verschillen zijn geplot in figuur 6.7. Hierin is te zien dat binnen Nederland nog verschillen van 5 cm over 200 km voorkomen. We zien hieruit dat er een verschil is tussen de zwaartekrachtinformatie uit het geopotiaalmodel OSU91 en de Europese zwaartekrachtdata in het spectrale gebied  $n = 30 - 50$ .

Tot slot nog de volgende opmerking. Als de beide datasets (geopotiaalmodel en binnengebieddata) precies zouden overeenkomen tot graad 360, dan nog maakt het uit welke kernfunctie wordt gebruikt in de combinatie-oplossing. Voor de graden hoger dan 360 zijn de gewichten  $(1 - w_n^*)$  niet altijd precies gelijk aan 1. Met name voor de gewone combinatie-oplossing is dit het geval. Er wordt dan een grote afbreekfout gemaakt. Bij vrijwel alle andere kernfuncties is  $w_n^*$  ongeveer nul, zodat daar bijna geen afbreekfout is, en gelijke geoïderesultaten worden gevonden. Het verschil zoals weergegeven in figuur 6.6 heeft twee redenen. Enerzijds zullen de twee datasets voor graden lager dan 360 niet hetzelfde zijn. Anderzijds maakt de gewone combinatie-oplossing een grotere afbreekfout dan de Meissl- of Meissl/Wong&Gore combinatie-oplossing. Deze laatste maken een verwaarloosbare afbreekfout (zie figuren 2.27 en 2.28).

## 6.3 Geoïde-effect van de testparameters uit paragraaf 4.4

In paragraaf 4.4 zijn verschillende parameters beschouwd voor de bepaling van gemiddelde blokwaarden. In deze paragraaf zullen de effecten hiervan op de berekende geoïde worden beschreven. De parameters zijn

- steungebied(grootte),
- predictiemethode,
- gebruikte covariantiefunctie,
- dichtheid van gebruikte puntdataset.

Het effect van de gebruikte blok grootte is al beschreven in 6.1.

### Steungebied bij kleinste-kwadraten predictie

De gemiddelde blokwaarden zijn uitgerekend met kleinste-kwadraten predictie. Daarbij zijn één keer alleen de beschikbare puntwaarden binnen het blokgebied zelf gebruikt (steungebied is gelijk aan blokgebied), en één keer zijn alle puntwaarden die binnen 7 km van het middelpunt van het blokgebied liggen gebruikt (steungebied  $\psi_r = 0.06^\circ$ ). De rms van de verschillen was 0.15 mgal, met een maximum van bijna 2 mgal. Het effect van deze verschillen op de berekende geoïde heeft een glad karakter en het effect bedraagt maximaal 3 mm over 40 km. Het rms-effect is 1 mm, het maximum is 4 mm. Dit zijn kleine en acceptabele verschillen voor een cm-preciese geoïde. Er hoeft dus geen probleem te worden verwacht door een steungebiedkeuze. Dit komt doordat de nieuwe Nederlandse dataset een zeer goede bedekking en kwaliteit heeft. Omdat met een steungebied van  $0.06^\circ$  de beste blokwaarden worden bepaald, is deze weg gekozen voor de Nederlandse berekening.

### Predictie met kleinste-kwadraten of representatiemethode

De predictie met een steungebied gelijk aan het blokgebied is gedaan met twee predictiemethoden: kleinste-kwadraten predictie en representatie. Het verschil in de gemiddelde blokwaarden had een rms-waarde van 0.2 mgal, met een maximum van ruim 1 mgal. Het effect op de geoïde is glad van karakter. De rms-waarde op de berekende geoïdehoogten is 1 mm, met een maximum van 5 mm. Er is een maximum lokaal verschil van 4 mm. Wederom kan worden geconcludeerd dat door de goede datadichtheid van de Nederlandse dataset de keuze voor de éne of de andere predictiemethode niet zeer kritisch is. Omdat kleinste-kwadraten beter rekening houdt met de ligging van de gegeven zwaartekrachtenpunten, en bovendien een groter steungebied wordt gebruikt, is voor deze predictiemethode voor de gemiddelde blokwaarden gekozen.

### Vorm van de covariantiefunctie

De gemiddelde blokwaarden zijn berekend met kleinste-kwadraten predictie, waarbij een analytische covariantiefunctie is gebruikt die wordt beschreven door (4.20). De parameter  $d$  is voor twee verschillende waarden toegepast, namelijk  $d = 30$  km en  $d = 60$

km. Dit betekent dat in het tweede geval punten sterker gecorreleerd worden geacht. Het verschil op de berekende blokwaarden was klein, met een rms van 0.008 mgal en een maximum van 0.043 mgal. Het effect op de geoïde is dus ook zeer klein, het is overall van sub-mm orde. Hetzelfde argument geldt ook hier weer, dat door de goede datadichtheid de gebruikte covariantiefunctie geen invloed heeft op het resultaat. Het heeft echter wel invloed op de berekende (co)varianties.

## Berekening met dataset in vier delen

De dataset met puntwaarden in Nederland is in hoofdstuk 4 opgesplitst in vier subsets met puntgegevens die elk zo goed mogelijk heel Nederland bedekken. Met deze subsets kan vier keer de geoïde worden uitgerekend en ook voor elk van de vier keer kan de geoïdeprecisie worden bepaald. De vraag is: komen de resultaten overeen binnen de precisiematen?

In tabel 4.8 zijn de verschillen van de vier subsets van gemiddelde zwaartekrachtanomalieën met de zwaartekrachtanomalieën uit de totale puntdataset gegeven. Deze verschillen kunnen ook worden omgerekend naar geoïdehoogte-effecten. Verschillen die in de 4 berekende geoïdemodellen voorkomen in Nederland zijn 6 mm over 5 km en 10 mm over 10 km afstand. Een maximale lokale uitschieter in de geoïdehoogteverschillen bedraagt 18 (-11/7) mm over 5 km. Geconcludeerd moet worden dat het wel degelijk zin heeft gehad om de gekozen dichtheid van zwaartekrachtspunten aan te houden. Waren er maar vier keer zo weinig punten gemeten, dan waren verschillen (fouten) van cm-niveau over korte afstanden voorgekomen.

## 6.4 Fout in de geoïde

In deze paragraaf wordt de formele foutberekening voor de geoïdehoogte(verschillen) nader bekeken. Voor de verschillende combinatie-oplossingen met verschillende kernfuncties zijn al de fouten door de ruis van de geopotentialcoëfficiënten en afbreekfout gegeven in hoofdstuk 2. Ze zullen nog kort worden behandeld. Daarna wordt de geoïdefout ten gevolge van de ruis van de gemiddelde blokwaarden in het binnengebied behandeld en vergeleken met de zojuist gevonden verschillen in de geoïderesultaten zelf.

### 6.4.1 Foutberekening geopotentialmodel en de vorm van het correctievlak

In hoofdstuk 2 zijn al grafieken gegeven met de fout in geoïdehoogteverschillen bij verschillende kernfuncties. De keuze voor de meest geschikte kernfunctie (verdeling van de gewichten over de twee datasets) zal één van de twee uitersten, de Meissl kernfunctie of de gecombineerde Meissl/Wong&Gore kernfunctie met  $L = 46$ , of de mogelijkheid die in het midden ligt, Meissl/Wong&Gore  $L = 32$ , zijn. Voorlopig gebruiken we in de voorbeelden de gecombineerde Meissl/Wong&Gore  $L = 46$  kernfunctie, zie de figuren 2.25 en 2.26.

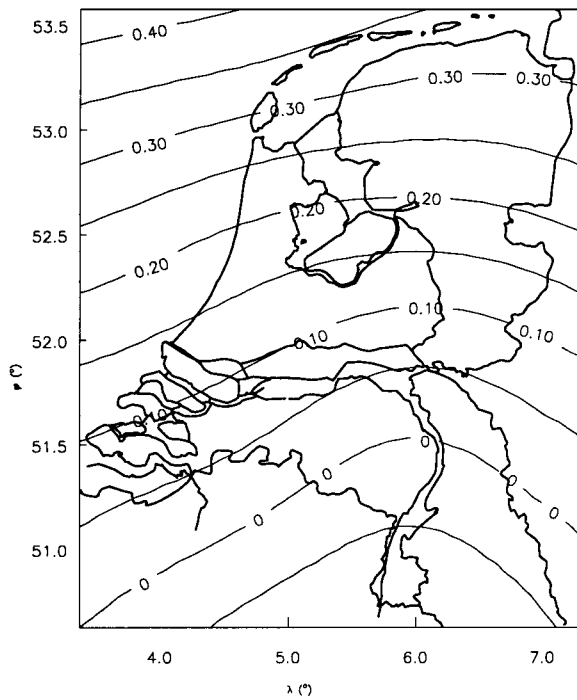
Om op basis van externe geoïde-informatie een correctie op de gravimetrische geoïde aan te brengen, is het van belang te weten hoe de geoïdefout zich gedraagt. Om een

indruk te krijgen in welke mate deze geoïdefout langgolvig is kan het spectrum worden geanalyseerd. Een eenduidige interpretatie van de golflengte van een bepaalde Legendre-polynoom  $P_n(\cos \psi)$  is moeilijk, zoals al in hoofdstuk 2 duidelijk is geworden. Daarom wordt hier een andere aanpak gevolgd om een indruk te krijgen van de langgolvige fout. Op basis van de foutgraadvarianties  $\varepsilon_n$  van het geopotentiaalmodel OSU91A zijn met behulp van een *random* generator willekeurige coëfficiënten bepaald die een fout zouden kunnen zijn die past bij de gebruikte foutgraadvarianties. Op basis van deze mogelijke fout, is bepaald hoe de fout er uit zou zien voor de geoïde in Nederland. Deze fout hangt sterk af van de gebruikte kernfunctie. Hij wordt beschreven door

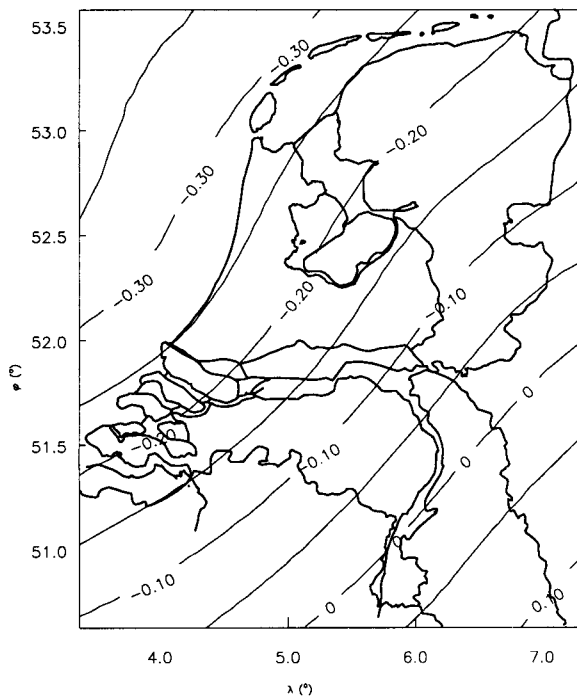
$$\delta N(P) = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{360} \frac{2}{n-1} (1 - w_n^*(\psi_o)) \sum_{m=-n}^n \Sigma_{nm} \bar{Y}_{nm}(P). \quad (6.3)$$

De coëfficiënten  $\Sigma_{nm}$  zijn de met een *random* generator berekende coëfficiënten die de mogelijke fout beschrijven. Voor de gecombineerde Meissl/Wong&Gore ( $L = 46$ ) kernfunctie worden twee foutvoorbeelden gegeven in de figuren 6.8 en 6.9. Ter vergelijking wordt deze fout ook gegeven voor de gewone combinatie-oplossing in figuur 6.10, waarbij dezelfde coëfficiënten zijn gebruikt als voor figuur 6.8.

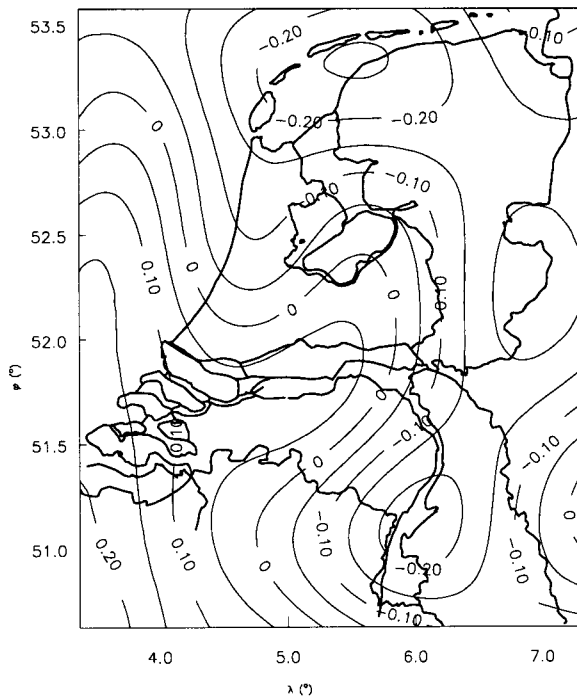
Uit deze figuren is goed te zien dat de fout in de geoïde door de fout in de geopotentiaalcoëfficiënten voor de gewone combinatie-oplossing kortgolvige variaties geeft (golflengte ongeveer 50 km), terwijl de gecombineerde Meissl/Wong&Gore oplossing alleen een zeer gladde fout oplevert. Zo'n gladde langgolvige fout is eenvoudig te corrigeren met behulp van een vlak, dat kan worden bepaald door vergelijking met GPS- en waterpasmetingen. De fout bij de gewone combinatie-oplossing is niet te modelleren door een eenvoudige functie van slechts enkele parameters.



**Figuur 6.8** Geoïdefout door een willekeurige geopotentialcoëfficiëntfout die aansluit bij de foutgraadvarianties van OSU91A. De gebruikte kernfunctie is Meissl/Wong&Gore  $L = 46$ ,  $\psi_0 = 5^\circ$ . In m, isolijneninterval is 0.05 m.



**Figuur 6.9** Geoïdefout door een andere willekeurige geopotentialcoëfficiëntfout die aansluit bij de foutgraadvarianties van OSU91A. De gebruikte kernfunctie is Meissl/Wong&Gore  $L = 46$ ,  $\psi_0 = 5^\circ$ . In m, isolijneninterval is 0.05 m.



**Figuur 6.10** *Geoidfout door een willekeurige geopotentialcoefficientenfout die aansluit bij de foutgraadvarianties van OSU91A. De gebruikte kernfunctie is gewone Stokes functie,  $\psi_o = 5^\circ$ . In m, isolijneninterval is 0.05 m.*

#### 6.4.2 Foutberekening binnengebieddata

De berekening in de geoidhoogteverschillen ten gevolge van de fout(co)varianties van de gemiddelde waarden gebeurt met (2.66). Voor de tweede testdataset uit hoofdstuk 4 zijn voor verschillende gevallen deze fout(co)varianties en foutvolumes gegeven. Hiermee zijn de bijdragen aan de relatieve geoidfouten bepaald voor allerlei afstanden tussen de geoidpunten. De gemiddelde foutresultaten worden weergegeven in tabel 6.2. De geoidfout is berekend op drie manieren: a) met gebruik van alle fout-covarianties van de gemiddelde blokwaarden, b) met gebruik van het foutvolume (de covarianties zijn naar de plaats van de variantie toe geschoven), c) met alleen de varianties, dus de covarianties worden verwaarloosd.

Geconcludeerd kan worden dat de voortgeplante ruis erg klein is, we praten over maximaal enkele mm. Voor deze data, met zeer hoge punt dichtheid in verhouding met de correlatieafstanden, maakt het niet veel uit of met alle foutcovarianties of met alleen foutvarianties of foutvolumes wordt gewerkt. De verwachting dat met kleinste kwadraten predictie kleinere voortgeplante geoidfouten worden bereikt dan met representatie gewichten wordt bevestigd. Evenzo dat met een groter steungebied een kleinere fout wordt gevonden. Hetzelfde geldt ook voor het gebruik van een andere covariantiefunctie, die een kleinere standaardafwijking voor de gemiddelde zwaartekrachtwaarden geeft, en dus ook voor de geoidhoogte.

Als we deze foutmaten vergelijken met de in de vorige paragraaf gevonden geoid-

**Tabel 6.2** *Relatieve geoïdeprecisie ten gevolge van de binnengebieddata. Dit is berekend voor fout(cov)varianties  $\sigma_{ii'}$ , foutvolume  $\sigma_{vol}^2$  en alleen foutvarianties  $\sigma_i^2$ . De resultaten zijn in cm.*

Afstand $\psi_{P_1P_2}$	Gemiddelde geoïdeprecisie bij gebruik van:		
	Foutcovarianties $\sigma_{ii'}$	Foutvolume $\sigma_{vol}^2$	Foutvarianties $\sigma_i^2$
Representatie, steungebied $\psi_r = 0.00^\circ$ , cov.functie met $d = 0.288^\circ$			
0.05°	0.11	0.11	0.13
0.10°	0.15	0.15	0.16
0.20°	0.19	0.17	0.20
0.50°	0.21	0.20	0.22
Kleinste-kwadraten, steungebied $\psi_r = 0.00^\circ$ , cov.functie met $d = 0.288^\circ$			
0.05°	0.06	0.06	0.06
0.10°	0.08	0.08	0.08
0.20°	0.10	0.10	0.10
0.50°	0.13	0.12	0.13
Kleinste-kwadraten, steungebied $\psi_r = 0.06^\circ$ , cov.functie met $d = 0.288^\circ$			
0.05°	0.04	0.04	0.04
0.10°	0.05	0.05	0.06
0.20°	0.07	0.06	0.07
0.50°	0.08	0.08	0.08
Kleinste-kwadraten, steungebied $\psi_r = 0.06^\circ$ , cov.functie met $d = 0.588^\circ$			
0.05°	0.03	0.03	0.04
0.10°	0.04	0.04	0.05
0.20°	0.05	0.05	0.06
0.50°	0.07	0.06	0.07

verschillen dan blijkt dat ze goed overeenkomen. De effecten door verschillende predictiemethoden, of een verschillend steungebied waren ook van 1 mm-orde.

Omdat de formele foutvoortplanting van de gemiddelde blokwaarden zo klein is hoeft weinig rekening te worden gehouden met de verschillen die worden gevonden voor verschillende afstanden tussen de twee geoïdeberekeningspunten. Het effect is 1 of 2 mm. De discretisatiefout die aan het begin van het hoofdstuk is gevonden is ook 2 mm, zodat de totale fout door het gebruik van de binnengebieddata op 3 mm kan worden gesteld.

Als we uitgaan van de gecombineerde Meissl/Wong&Gore methode, met  $L = 32$  dan wordt de totale fout in een geoïdehoogteverschil in Nederland beschreven door

$$\sigma_{\Delta N_{P_1 P_2}}^2 \text{ (cm)} = 0.3^2 + (0.04 \cdot d_{P_1 P_2} \text{ (in km)})^2, \quad (6.4)$$

met  $d_{P_1 P_2}$  de afstand tussen de twee geoïdeberekeningspunten.

De beschikbare zwaartekrachtdata in België en op de Noordzee zijn niet zo goed als in Nederland. De foutbeschrijving van deze data zijn kort beschreven in hoofdstuk 3, en we moeten hier nog uitrekenen wat de bijdrage is aan de geoïdeprecisie. De fout van de data in België wordt beschreven door een aangepaste versie van (3.6), die gegeven is voor de Hannover-dataset, waar de Belgische waarden uit zijn gehaald. Omdat deze dataset een veel groter gebied bestrijkt dan alleen België, laten we de constante bijdrage van 10 mgal<sup>2</sup> buiten beschouwing. We zien ook in figuur 8.5 dat er geen constant verschil van ruim 3 mgal is tussen Nederland en België. Verder is de standaardafwijking van 6.3 mgal ( $6.3^2=40$ ) aangepast tot 4 mgal, omdat dit een realistischer waarde is als wordt gekeken naar de vergelijking tussen de Hannover dataset en de puntdata in België uit de BGI landdataset. De precisie van de data in België wordt beschreven door

$$D(\psi) = 4^2 \exp(-4\psi) \text{ mgal}^2, \quad (6.5)$$

met  $\psi$  in graden ( $^\circ$ ). Deze foutbeschrijving wordt weergegeven in figuur 6.11. De fout van de data op de Noordzee beschrijven we als

$$D(\psi) = 1^2 \exp(-7\psi) \text{ mgal}^2. \quad (6.6)$$

De variantiewaarde is gegeven door BGS, en volgt uit een uitgebreide analyse van alle vaarlijnen en de kruispunten daarvan. Omdat de metingen van zeegravimeters doorgaans gecorreleerd zijn over een bepaald tijdsinterval ontstaat er ook correlatie tussen fouten in de metingen van een vaarlijn. Met het bovengenoemde ruismodel wordt enige correlatie geïntroduceerd tussen waarden die kort na elkaar zijn gemeten. De foutcovariantiesfunctie voor de zwaartekrachtdata op de Noordzee is weergegeven in figuur 6.12.

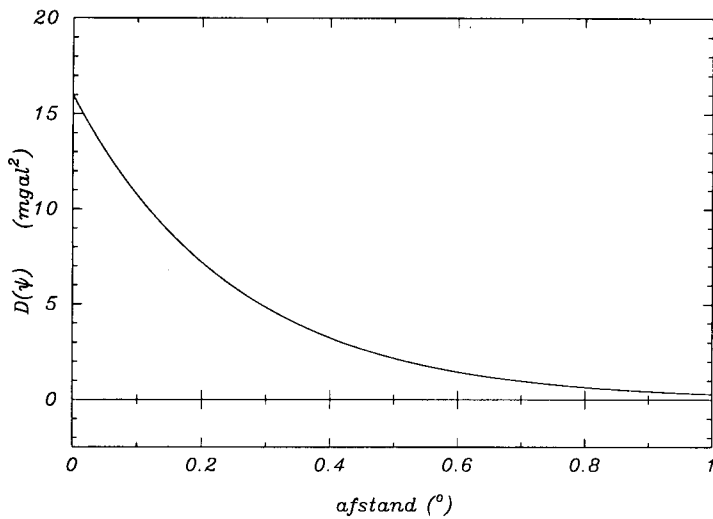
Voor verschillende afstanden tussen de twee geoïdeberekeningspunten is de voortgeplante fout van de Belgische zwaartekrachtdata (met (6.5)) berekend. Dit is ook gedaan voor verschillende afstanden van de berekeningspunten tot aan het Belgische datagebied. Op basis van deze berekeningsresultaten is een vergelijking opgesteld die een goede weergave van deze resultaten is. Deze algemene formule die de fout in de geoïde binnen Nederland beschrijft ten gevolge van de dataruis van de data in België, is

$$\sigma \text{ (in cm)} = 1.0 \frac{d_{P_1 P_2}}{d_{\text{België}}} \quad d_{\text{België}} > 10 \text{ km} \quad (6.7)$$

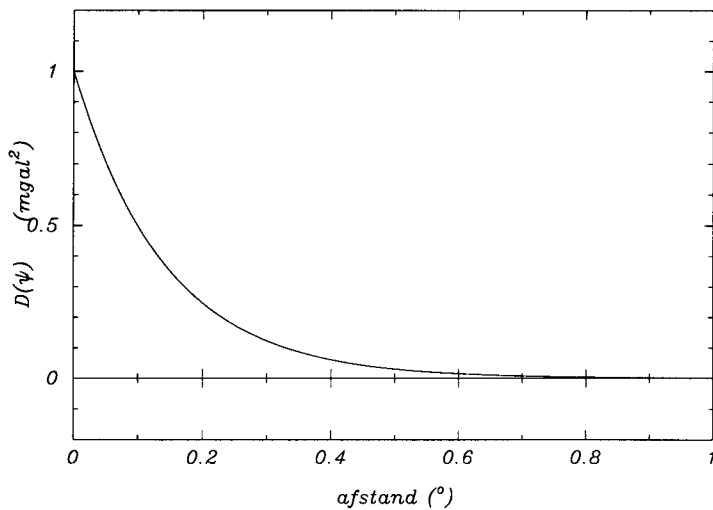
$$\sigma \text{ (in cm)} = 0.10 d_{P_1 P_2} \text{ (in km)} \quad d_{\text{België}} < 10 \text{ km}.$$

De afstand  $d_{\text{België}}$  is de kleinste afstand tussen één van beide (of beide) geoïdeberekeningspunten en de Belgische grens.  $d_{P_1 P_2}$  is de afstand tussen de twee geoïdeberekeningspunten.





**Figuur 6.11** Foutcovariantiefunctie van de data in België.



**Figuur 6.12** Foutcovariantiefunctie van de data op de Noordzee.

Voor geoïdeberekeningspunten vlak bij België is dus een grote extra bijdrage in de geoïdeprecisie. Voor twee geoïdeberekeningspunten die 15 km uit elkaar liggen vinden we bijvoorbeeld: als het dichtst bij zijnde punt op 10 km van België ligt dan is het effect 1.5 cm, terwijl als dat 30 km is het effect 0.5 cm is. Liggen de berekeningspunten ver weg van België, bijvoorbeeld 75 km, dan is de precisiebijdrage aan de relatieve geoïde nog maar 2 mm.

Op dezelfde manier is dit ook gedaan voor de Noordzee-data precisiebeschrijving (6.6). Een algemene formule die de fout in de geoïde binnen Nederland beschrijft ten gevolge

van de dataruis van de data in het Noordzeegebied is

$$\sigma \text{ (in cm)} = 0.25 \frac{d_{P_1 P_2}}{d_{\text{Noordzee}}} \quad 7.5 \text{ km} < d_{\text{Noordzee}} < 30 \text{ km} \quad (6.8)$$

$$\sigma \text{ (in cm)} = 0.035 d_{P_1 P_2} \text{ (in km)} \quad d_{\text{Noordzee}} < 7.5 \text{ km} .$$

De afstand  $d_{\text{Noordzee}}$  is de kleinste afstand tussen één van beide (of beide) geoïdeberekeningspunten en de Noordzee. Als beide berekeningspunten meer dan 30 km van de Noordzee afiggen dan bedraagt de ruisbijdrage nog maximaal enkele mm.

### Foutbeschrijving van de dataset in vier delen

Op basis van de subsetverdeling van de zwaartekrachtpuntdata, zijn in 4.4 gemiddelde blokwaarden van 3'x5' bepaald, samen met de bijbehorende fout(co)varianties. Dit is gedaan met kleinste-kwadratenpredictie met steungebieden van het blokgebied en van  $0.06^\circ$ . Voor de volledige puntdataset zijn deze foutwaarden beschreven in de vorige paragraaf. Voor de subsetpuntdata met slechts een kwart van het aantal punten wordt dit gedaan in tabel 6.3. Duidelijk is dat de precisie van de gemiddelde waarden minder goed is dan bij de dichtere puntdataset. Dit is te verklaren, doordat bij gebruik van de volledige dataset voor minder punten een predictiefout wordt gemaakt, omdat er meetwaarden aanwezig zijn. Bovendien kan op de plaatsen tussen de meetpunten in beter worden voorspeld omdat de gegeven meetwaarden gemiddeld dichterbij liggen.

Het effect op de geoïdeprecisie bedraagt 2-3 mm. Dit is ongeveer een factor 4 groter dan bij het gebruik van de volledige dataset. De verschillen in de geoïderesultaten waren tot aan 5-10 mm en één maximum uitschieter van 18 mm. De precisiegraden zijn dus niet volledig in overeenstemming met de gevonden geoïdeverschillen en lijken een factor 1.5-2 te klein geschat.

## 6.5 Keuze van het binnengebied

Gegeven de zwaartekrachtdata in het binnengebied kunnen nog twee belangrijke keuzes worden gemaakt over welke data worden gebruikt. Aan de ene kant kan een straal van een cirkelvormig binnengebied worden gekozen. De beschikbare data bepalen wat de grootst mogelijke straal is, er kan echter ook voor een kleinere straal worden gekozen. Daarnaast kan in plaats van een vast en meebewegend cirkelvormig binnengebied voor ieder geoïdeberekeningspunt gewoon alle beschikbare lokale data worden gebruikt.

### Grootte

Als een bepaalde zwaartekrachtdataset is gegeven, zoals voor Nederland bijvoorbeeld alle data in Europa, kan een keuze worden gedaan over welk deel hiervan wordt gebruikt voor de geoïdeberekening. In het Nederlandse geval is de maximale grootte van het gebied waarvoor zwaartekrachtdata gegeven is  $5^\circ$ . Er zouden echter ook alleen data

**Tabel 6.3** *Relatieve geoïdeprecisie ten gevolge van de binnengebieddata. Dit is berekend voor fout(co)varianties  $\sigma_{ii'}$ , foutvolume  $\sigma_{vol}^2$ , en alleen foutvarianties  $\sigma_i^2$ . Er is gebruik gemaakt van een subset, die bestaat uit een kwart van de totale dataset in Nederland. De resultaten zijn in cm.*

Afstand $\psi_{P_1 P_2}$	Gemiddelde geoïdeprecisie bij gebruik van:		
	Foutcovarianties $\sigma_{ii'}$	Foutvolume $\sigma_{vol}^2$	Foutvarianties $\sigma_i^2$
Kleinste-kwadraten, steungebied $\psi_r = 0.06^\circ$ , cov.functie met $d = 0.288^\circ$			
0.05°	0.14	0.14	0.17
0.10°	0.19	0.18	0.22
0.20°	0.24	0.21	0.26
0.50°	0.30	0.26	0.32
Kleinste-kwadraten, steungebied $\psi_r = 0.06^\circ$ , cov.functie met $d = 0.588^\circ$			
0.05°	0.12	0.12	0.15
0.10°	0.16	0.15	0.18
0.20°	0.20	0.18	0.22
0.50°	0.25	0.22	0.27

in een kleiner gebied kunnen worden gebruikt. De keuze voor een kleiner binnengebied wordt onder andere beargumenteerd door (Kearsley, 1988) en (Featherstone, 1992). De eerste heeft als voornaamste argument dat het minder rekenwerk is. Dat is voor hem van belang, omdat hij een andere numerieke integratie techniek toepast, de RINT-integratie. Hierbij moeten voor elk nieuw geoïdeberekeningspunt nieuwe gemiddelde zwaartekrachtwaarden worden berekend uit de beschikbare puntdata, omdat de gemiddelde waarden niet worden berekend voor rechthoekige gebieden, maar voor cirkelvormige *templates* vanaf het geoïdeberekeningspunt (zie Heiskanen&Moritz, 1967, p.118). Deze numerieke integratietechniek wordt gebruikt omdat daarmee geïntegreerde Stokes gewichten analytisch kunnen worden bepaald. Zoals in paragraaf 2.3 is getoond kan dat voor rechthoekige blokgebieden ook precies worden gedaan, zodat de omslachtige aanpak van de RINT-integratie niet de voorkeur geniet.

Featherstone (1992) geeft, behalve de rekentijd, ook andere argumenten. Hij richt zich met name op het optimale geoïderesultaat zelf. Bij het zoeken naar een optimale binnengebiedgrootte maakt hij gebruik van een kunstmatig zwaartekrachtsignaal in het buitengebied. Bij de bepaling van de optimale binnengebiedgrootte heeft hij een buitengebiedsignaal gekozen dat een constante waarde heeft. Dit is niet reëel, en geeft daarom ook niet een reële optimale kapgrootte (binnengebiedgrootte). Zijn methode maakt gebruik van het gegeven dat de afbreekfout minimaal is als de kernfunctie ge-

lijk is aan nul op de rand van het binnengebied. De kernfunctie waar hij op uit komt heeft binnen  $5^\circ$  meerdere nuldoorgangen. Hij kiest voor de eerste, omdat dat het minste rekenwerk kost. Er mag echter worden verwacht dat de keuze van een volgende nuldoorgang het geoidresultaat nog zal verbeteren, of ten minste betrouwbaarder zal maken. Dit kan weer worden vergeleken met de argumentatie in paragraaf 2.7, figuren 2.19 en 2.20.

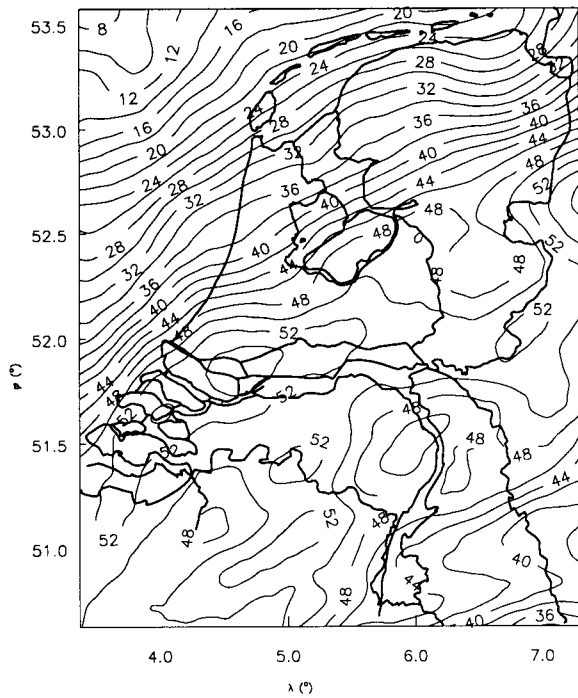
Omdat een goed en objectief criterium voor een optimale binnengebiedgrootte niet eenvoudig te vinden is, wordt de meest natuurlijke argumentatie gevolgd dat hoe meer data worden gebruikt, hoe beter het resultaat zal zijn. Stokes integraal is en blijft ten slotte een globale integratie. Hoe groter het integratiegebied is, hoe beter.

Voor Nederland is voor verschillende binnengebiedgrootten de geoid berekend. Dit is gedaan voor de gewone combinatie-oplossing en voor de gecombineerde Meissl/Wong&Gore methode met  $L = 46$ , voor binnengebiedgrootten van  $\psi_o = 5^\circ, 4^\circ, 3^\circ$  en  $2^\circ$ . De verschillen van de laatste drie met het binnengebied van  $5^\circ$  zijn weergegeven in tabel 6.4.

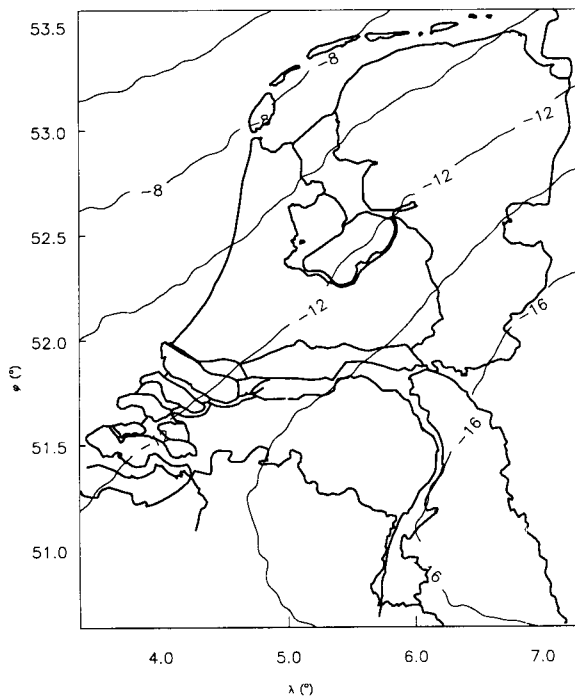
Voor het binnengebied van  $2^\circ$  wordt voor beide combinatiemethoden het verschil met het  $5^\circ$ -binnengebied gegeven in de figuren 6.13 en 6.14. Hierin is te zien dat het verschil een voornamelijk langgolvig karakter heeft. Bij de gewone combinatie-oplossing heeft dit langgolvige verschil een grotere amplitude dan bij de gecombineerde Meissl/Wong&Gore-oplossing. Bij deze laatste komen ook nog eens minder hoogfrequente verschillen voor dan bij de gewone combinatie-oplossing.

**Tabel 6.4** Statistieken van de verschillen tussen kleinere binnengebiedgrootten en een  $5^\circ$ -binnengebied. In m.

$\psi_o$	gewone combinatie				Meissl/Wong&Gore $L = 46$			
	gemiddelde	rms	min	max	gemiddelde	rms	min	max
$2^\circ$	0.409	0.120	0.073	0.565	-0.121	0.032	-0.178	-0.044
$3^\circ$	0.312	0.111	0.005	0.508	-0.118	0.031	-0.175	-0.043
$4^\circ$	0.136	0.066	0.007	0.295	-0.079	0.023	-0.110	-0.020



**Figuur 6.13** Geoidverschillen van de gewone combinatie-oplossingen voor binnengebiedgrootten van  $5^\circ$  en  $2^\circ$ . In cm, isolijneninterval is 2 cm.



**Figuur 6.14** Geoidverschillen van de Meissl/Wong&Gore  $L = 46$  combinatie-oplossingen voor binnengebiedgrootten van  $5^\circ$  en  $2^\circ$ . In cm, isolijneninterval is 2 cm.

Een kleiner binnengebied gebruiken met de gecombineerde Meissl/Wong&Gore  $L = 46$  kernfunctie is eigenlijk niet juist. De keuze voor  $L = 46$  volgt uit de binnengebiedgrootte van  $5^\circ$ , zie paragraaf 2.7. Omdat de geopotentialmodelruis en afbreekfout groter zijn voor kleinere binnengebiedgrootte bij de gewone combinatie-oplossing, en een kleinere kapgrootte niet in overeenstemming is met de Meissl/Wong&Gore  $L = 46$  kernfunctie, wordt voor een binnengebied van  $5^\circ$  gekozen. Bovendien is doorgaans de binnengebieddata van redelijk goede kwaliteit. Is de data slechter dan de data uit het globale geopotentialmodel, dan heeft het geen zin deze data nog te gebruiken. Maar dit is in de praktijk niet het geval omdat doorgaans in het geopotentialmodel geen betere data zijn gebruikt dan wat men zelf beschikbaar kan krijgen.

### Vorm

Buiten de keuze van de grootte van een cirkelvormig binnengebied heeft men ook nog de keuze van het gebruik van een cirkelvormig integratiegebied per geoidberekeningspunt, of het gebruik van alle beschikbare data voor elk berekeningspunt. Dit laatste wordt vaak gedaan in praktische berekeningen van de geoid, terwijl de eerste keuze altijd wordt gedaan bij meer theoretische beschouwingen van de geoidberekening.

Als het binnengebied niet cirkelvormig wordt genomen, maar bijvoorbeeld rechthoekig, dan kunnen de spectrale gewichten niet meer eenvoudig worden bepaald. Er ontstaan een soort *lumped* coëfficiënten, de spectrale coëfficiënten zijn een combinatie van de spectrale coëfficiënten van een cirkelvormig gebied (Gaposchkin, 1980). Omdat per geoidberekeningspunt het binnengebied een andere vorm en ligging heeft, zijn de spectrale coëfficiënten, ofwel het gebruik van de beschikbare data, per geoidberekeningspunt verschillend. Dit is niet bevorderlijk voor het inzicht in hoe de geoid wordt berekend.

Voor de berekening van de fouten ten gevolge van de ruis van de geopotentialcoëfficiënten en de afbreekfout worden de spectrale coëfficiënten van een cirkelvormig binnengebied  $Q_n^*$  gebruikt. Om een formele foutberekening te doen is een cirkelvormig binnengebied nodig. Deze formele foutmaat hoort dan bij de geoidberekening die ook met dat cirkelvormige binnengebied is uitgevoerd. Dit is een tweede belangrijke reden om met zo'n cirkelvormig binnengebied te werken.

De verschillen tussen de berekeningen zijn klein. Binnen Nederland geeft het een langgolvig verschil met een lichte kromming, met verschillen tot 1 cm.

## 6.6 Vergelijking gravimetrische geoïdeberekeningen met GPS/waterpassen en schietloodafwijkingen.

In deze paragraaf worden de verschillende gravimetrische geoïdeberekeningen, volgend uit verschillende kernfunctiemodificaties, vergeleken met de beschikbare GPS- en waterpasmetingen van de NEREF-Mareo'94 campagne en met de schietloodafwijkingen. Deze twee datasets zijn beschreven in hoofdstuk 5. Er wordt voor 36 plaatsen schietloodafwijkingen gebruikt, waarvan er op 8 punten alleen een breedte-component beschikbaar is. De GPS/waterpas-resultaten in Delft en Hoek van Holland zijn niet gebruikt, omdat in beide vermoedelijk fouten in de NAP-hoogte of antenne-hoogte voorkomen (van respectievelijk 4 en 25 cm). Er zijn in totaal dus 17 punten gebruikt.

In tabel 6.5 staan de statistieken gegeven van de verschillen tussen de gravimetrische geoïdehoogten en de gemeten geoïdehoogten uit GPS- en waterpasmetingen. Naast de nieuw berekende gravimetrische geoidmodellen is ook de vorige geoïde voor Nederland, de Van Willigen geoïde, vergeleken. Op basis van de gevonden verschillen tussen gravimetrische geoïde en GPS/waterpassen, is een correctievlak berekend, zodanig dat een optimale aansluiting tussen gravimetrische- en GPS/waterpas-geoïdehoogten wordt verkregen. Dit correctievlak is nodig, omdat de gravimetrische geoïde een grote lang-golvige fout heeft ten gevolge van het gebruikte geopotentialmodel. In paragraaf 6.4.1 bleek dat een vlak dat wordt beschreven door slechts 3 parameters ( $f(\varphi, \lambda) = a + b\varphi + c\lambda$ ) een voldoende goede beschrijving van de fout moet kunnen geven. Het vlak is berekend door een kleinste-kwadraten aansluitingsvereffening, waarbij de volledige covariantiematrix van de GPS-metingen is gebruikt. Voor de waterpas- en geoïderuis gezamenlijk is 5 mm genomen. Een kleinere keuze voor deze ruis heeft niet veel effect op het resultaat. De statistieken van de restverschillen tussen de gecorrigeerde geoidmodellen en de GPS/waterpas-metingen zijn gegeven in tabel 6.5.

Uit tabel 6.5 blijkt dat met een kernfunctiemodificatie zoals Meissl of Meissl/Wong&Gore (MWG) een veel betere overeenkomst wordt bereikt dan met de gewone combinatie-oplossing (Molodenskii). Het weghalen van de afbreekfout, die voorkomt op de hogere frequenties geeft een significante verbetering van 5 cm naar 1-1.5 cm rms. Verder blijkt

**Tabel 6.5** Statistieken van de verschillen tussen gravimetrische geoïde-oplossingen en GPS- en waterpasmetingen, in m.

	Puur gravimetrisch		Gravimetrisch + vlak		
	gemiddelde	rms	gemiddelde	rms	$\sigma$
Van Willigen	-1.113	0.065	0.041	0.049	0.066
Molodenskii	-0.925	0.092	0.040	0.050	0.066
Meissl	-0.632	0.037	0.006	0.013	0.015
MWG32	-0.508	0.049	0.001	0.012	0.012
MWG46	-0.429	0.062	-0.001	0.014	0.014

dat de Meissl-kernfunctie in eerste instantie (voor het aanbrengen van een correctievlak) beter overeenkomt dan de gecombineerde Meissl/Wong&Gore oplossingen. Na het aanbrengen van een correctievlak is de overeenkomst met GPS/waterpassen vergelijkbaar, en op het niveau van ruim een cm. Het correctievlak voor de Meissl-berekening heeft een kleinere helling dan de gecombineerde Meissl/Wong&Gore-berekening. De oorspronkelijke rms is daarom kleiner. Kennelijk beschrijft de binnengebieddata, die bij Meissl meer gewicht krijgen, het langgolvlige zwaartekrachtssignaal beter dan het geopotentialmodel. De gecombineerde Meissl/Wong&Gore methode met  $L = 32$  en een correctievlak geeft de kleinste verschillen ten opzichte van GPS/waterpassen ( $\sigma = 12$  mm).

De vergelijking van de diverse gravimetrische geïdemodellen met de schietloodafwijkingen is beschreven in tabel 6.6. Hierin is te zien dat met een kernfunctiemodificatie een betere overeenstemming met de schietloodafwijkingen wordt bereikt. De resterende verschillen zijn al op het niveau van de precisie van de schietloodafwijkingen. Uit de vergelijking van de Van Willigen geïde en de nieuwe Molodenskii-berekening blijkt dat de nieuwe zwaartekrachtdata een significant deel van de geïdeverbetering voor hun rekening nemen. De rms van de verschillen is een factor 2 kleiner! De kernfunctiemodificaties die de afbreekfout flink verkleinen komen beter overeen met de schietloodafwijkingen dan de gewone combinatie-oplossing. In tabel 6.7 worden de verschillen gegeven tussen de gemeten schietloodafwijkingen en de met een vlak gecorrigeerde gravimetrische geïdemodellen. Hierin zien we dat de oplossingen met Meissl en Meissl/Wong&Gore beter overeenkomen dan de gewone combinatie-oplossing. De beste oplossingen zijn evengoed en hebben een overeenkomst met de schietloodafwijkingen op het precisie-niveau hiervan.

De nieuwe zwaartekrachtdata in Nederland beschrijven de kleine golflengten dus veel beter zoals blijkt uit de vergelijking Van Willigen-Molodenskii. Verder maakt het verkleinen van de afbreekfout dat de hoge frequenties in de geïde nog meer worden verbeterd. Zowel de Meissl, als de beide gecombineerde Meissl/Wong&Gore berekeningen komen beter overeen met de externe geïde-informatie dan de gewone combinatie (Molodens-

**Tabel 6.6** Statistieken van de verschillen tussen gravimetrische geïde-oplossingen en schietloodafwijkingen, in ".

	Puur gravimetrisch			
	gemiddelde		rms	
	$\xi$	$\eta$	$\xi$	$\eta$
Van Willigen	0.01	-0.14	0.51	0.52
Molodenskii	-0.16	-0.07	0.26	0.26
Meissl	0.00	-0.13	0.22	0.28
MWG32	0.05	-0.19	0.22	0.28
MWG46	0.08	-0.25	0.22	0.27



**Tabel 6.7** *Statistieken van de verschillen tussen gravimetrische geoïde-oplossingen en schietloodafwijkingen, in ".*

	Gravimetrisch + vlak			
	gemiddelde		rms	
	$\xi$	$\eta$	$\xi$	$\eta$
Van Willigen	-0.01	-0.04	0.51	0.52
Molodenskii	-0.01	-0.01	0.26	0.26
Meissl	-0.02	-0.02	0.22	0.28
MWG32	-0.02	-0.03	0.22	0.27
MWG46	-0.02	-0.06	0.22	0.28

kii). Dit geldt zowel voor de GPS/waterpas-gegevens als de schietloodafwijkingen. De fout gaat respectievelijk van 5 cm naar ruim 1 cm, en van 0.37" naar 0.35".

De verschillen tussen de Meissl en de gecombineerde Meissl/Wong&Gore berekeningen zijn klein. Zowel wat de geoïdemodellen zelf betreft, als wat de vergelijking met externe geoïde-informatie betreft. De verschillen in geoïdehoogten zijn voor het grootste deel van Nederland beneden 1 cm, alleen in het oostelijk deel van Gelderland is een verschil van 3 cm over ongeveer 80 km tussen de Meissl berekening en de Meissl/Wong&Gore  $L = 46$  berekening. De Meissl/Wong&Gore  $L = 32$  berekening bevindt zich in het midden. In hoofdstuk 2 is beschreven dat er geen eenduidige theoretische argumenten zijn om voor één van de methoden te kiezen. Uit de vergelijkingen met GPS/waterpassen en de schietloodafwijkingen blijkt dat de methode die in het midden ligt, Meissl/Wong&Gore  $L = 32$ , iets betere resultaten geeft dan de twee uiterste methoden die uit de theoretische overwegingen volgen. Daarom is dit de methode die wordt gebruikt voor de geoïdeberekening voor Nederland.

Voor de gekozen Meissl/Wong&Gore  $L = 32$  geoïdeberekening is een vergelijking gedaan voor verschillende kapgrootten met de GPS/waterpas gegevens. De resultaten

**Tabel 6.8** *Statistieken van de verschillen tussen gravimetrische geoïde-oplossingen met Meissl/Wong&Gore  $L = 32$  met verschillende kapgrootten en GPS/H, in m.*

Kapgrootte	gemiddelde	rms	rms na vlakcorrectie
2°	-0.528	0.051	0.014
3°	-0.542	0.047	0.013
4°	-0.541	0.048	0.013
5°	-0.508	0.049	0.012

hiervan staan gegeven in tabel 6.8. Hieruit blijkt dat met het 5°-binnengebied en een gecorrigeerd geoidemodel de beste overeenkomst met de GPS/waterpas-resultaten wordt verkregen.

## 6.7 Conclusies

De conclusies die volgen uit de tests die in dit hoofdstuk zijn uitgevoerd worden hier nog eens samengevat.

De discretisatiefout is 2 mm voor Nederland. De geoiderekeningspunten kunnen het beste precies midden in de zwaartekrachtblokgebieden worden gekozen.

De verschillen tussen numerieke integratie over blokken en punten zijn 2 mm. Verschillen tussen numerieke integratie en collocatie kunnen meerdere cm over 20 km bedragen. De gewichten die aan de gemiddelde zwaartekrachtwaarden worden gegeven verschillen veel. Door de kruis-covariantiefunctie aan te passen kunnen vrijwel identieke resultaten worden verkregen. Een vergelijking met GPS/waterpassen met collocatie-resultaten is niet mogelijk doordat met collocatie geen binnengebied van 5° kan worden gebruikt in verband met computerfaciliteiten.

De effecten van verschillende parameters voor de berekening van gemiddelde blokwaarden is op het niveau van 1 of enkele mm. Voor een dataset die 4 keer zo weinig punten bevat (1 punt per  $(4 \text{ km})^2$ ) worden verschillen tot 5-10 mm gevonden.

De formele foutberekening van geoidhoogteverschillen ten gevolge van de binnengebieddata geeft een standaardafwijking op mm niveau. Dit geldt voor verschillende grootten van het steungebied. Het gebruik van representatie in plaats van kleinste-kwadraten collocatie scheelt ongeveer een factor 2 in de standaardafwijking. Omdat bij de kleinste-kwadraten predictiemethode nauwelijks correlatie tussen buurblokken ontstaat voor de Nederlandse dataset, maakt het bij de geoiderekening niet uit of de covarianties, het foutvolume of alleen de varianties worden gebruikt. Als de dataset minder dicht is, dan maakt het wel uit. Met een kwart van de Nederlandse data wordt de geoiderekening met gebruik van foutvolumes tot 15% te optimistisch geschat, terwijl met gebruik van alleen varianties de geoiderekening meestal 10% te pessimistisch wordt geschat. Dit laatste komt doordat correlaties in de blokwaarden een gunstige invloed hebben op de bepaling van geoidereverschillen.

De zwaartekrachtdata in België en op de Noordzee zijn minder goed van kwaliteit. De bijdrage aan de standaardafwijking van de geoidereverschillen is voor korte afstanden van cm-orde. Vooral geoidereverschillen dicht bij België kunnen een standaardafwijking van meerdere cm's hebben. Voor geoiderepunten die binnen enkele tientallen km van elkaar liggen en meer dan 30-50 km van België vandaan liggen is het effect van sub-cm orde.

Als gebruik wordt gemaakt van een kernfunctie die de afbreekfout verkleint, dan resteert een langgolvlige fout in de gravimetrische geoidere die goed kan worden beschreven middels een eenvoudig plat vlak. De verbetering van de gravimetrische geoidere in Nederland uit

GPS/waterpas-metingen wordt daarom beschreven door de functie  $\delta N = a + b(\lambda - 5) + c(\varphi - 52)$ .

De geoïderesultaten verschillen veel door het gebruik van verschillende kernfunctiemodificaties. Niet alleen systematisch verschil van meerdere dm's, maar ook op kleine golflengten 20-100 km zijn verschillen zichtbaar. Met name tussen de gewone combinatieoplossing en Meissl- en Meissl/Wong&Gore kernfuncties. Dit wordt veroorzaakt door het verwijderen of verkleinen van de afbreekfout. De gewichten voor hoge graden ( $n > 50$ ) moeten zo dicht mogelijk bij 1 worden gekozen voor de binnengebieddata. Uit de vergelijking met externe geoïde-informatie blijkt dat inderdaad een significante verbetering wordt bereikt. Uit GPS/waterpassen blijkt dat de rms van de verschillen van 5-6 cm naar 1-1.5 cm gaat. Schietloodafwijkingen, die controle op kortgolvlige geoïdedeel geven, hebben een rms-verschil met de nieuwe geoïdemodellen van respectievelijk 0.37" en 0.34". De standaardafwijking van schietloodafwijkingen zelf is ook van die orde, zodat betere resultaten dan de 0.34" niet mogen worden verwacht.

De gecorrigeerde geoïde uit de gecombineerde Meissl/Wong&Gore  $L = 32$  methode geeft de beste resultaten in vergelijking met de externe geoïde-informatie. Deze methode zal worden gebruikt voor de geoïdeberekening voor Nederland.

Een groter binnengebied levert een betere geoïde op. Niet alleen is de formele fout kleiner. Ook de verschillen met onafhankelijke geoïde-informatie zijn kleiner als de geoïdehoogten met een groter binnengebied zijn berekend.

## 7 Modelfouten

Tot nu toe hebben we Stokes integraal (2.5) gebruikt, om de geoidhoogte uit te rekenen gegeven de zwaartekrachtanomalieën. Dit model is niet helemaal juist, maar kan alleen worden geïntroduceerd na het aannemen van enkele benaderingen. In dit hoofdstuk zal aan de hand van literatuur worden beschreven wat deze benaderingen zijn, wat de invloed ervan is, en kijken we welke wel en niet acceptabel zijn voor de geöide in Nederland.

Een belangrijke stap in het verbeteren van het model voor de bepaling van de vorm van de aarde is gemaakt door Molodenskii (Molodenskii e.a., 1962). Hij introduceerde een geheel nieuw en ander concept dan Stokes heeft gevolgd. Het probleem dat de dichtheid van de massa tussen de geöide en het aardoppervlak bekend moet zijn, verdwijnt hiermee. In dit hoofdstuk volgen we de aanpak van Molodenskii, en vergelijken deze met die van Stokes.

De modelfouten spelen een rol afhankelijk van de gewenste precisie die men wenst te bereiken voor de geöide. Toen de beschikbare hoeveelheid en kwaliteit van de zwaartekrachtdata verbeterde in de jaren '70, is door onder andere (Lelgemann, 1970; Mather, 1973; Moritz, 1974, 1975) gewerkt aan het verbeteren van het berekeningsmodel ten einde met decimeter-precisie te kunnen werken. De belangrijkste correcties die moeten worden aangebracht zullen worden beschreven. Ze betreffen de atmosfeeraantrekking, het topografie-effect, en de bolbenadering. Inmiddels wordt al weer enkele jaren gesproken over cm-precisie, terwijl voor een model met cm-precisie weinig aandacht is geweest. Moritz e.a. hebben bij de afleiding van de modelcorrecties benaderingen geaccepteerd tot dm-niveau. Momenteel worden nog steeds de resultaten van deze afleidingen gebruikt. Met name wat het topografie-effect betreft en de invloed van niet-lineaire termen zou meer aandacht op zijn plaats zijn. Slechts incidenteel wordt hier naar gekeken (zie bijvoorbeeld Heck, 1991; Smeets, 1992). Verder is er momenteel vernieuwde aandacht voor het verbeteren van de reductietechnieken die van belang zijn als de Stokes aanpak wordt gevolgd (Vanicek&Martinec, 1994). Voor Nederland zijn deze effecten niet van belang, vanwege de geringe hoogten en hoogtevariëaties.

### 7.1 Molodenskii oplossing

Het klassieke probleem dat dient te worden opgelost is een vrij randvoorwaardeprobleem. In de praktijk is de horizontale positie van meetpunten goed bekend, zodat alleen de vorm van de aarde (de hoogte) hoeft te worden bepaald. Dit is het scalaire randvoorwaardeprobleem van de Molodenskii. Gegeven de (gemeten) zwaartekrachtwaarden en potentiaalverschillen op het aardoppervlak, wat is de vorm van het aardoppervlak en wat is de zwaartekracht potentiaal  $W$  op en buiten het aardoppervlak? Daarbij moet worden opgemerkt dat de potentiaalverschillen geen direct gemeten grootheden zijn,

maar dat deze kunnen worden berekend uit zwaartekrachtmetingen gecombineerd met waterpasmetingen. Er moet een oplossing worden gevonden gegeven de randvoorwaarde die voldoet aan de Laplace vergelijking voor de stoorpotentiaal

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} T \rightarrow 0. \quad (7.1)$$

De gegeven randwaarden in dit scalaire Molodenskii probleem zijn de zwaartekracht-anomalieën  $\Delta g$  en de potentiaal-anomalieën  $\Delta W$ . Bij het bepalen van de randwaarde-vergelijking is het nodig enkele benaderingen te introduceren om tot een oplossing van het probleem te kunnen komen.

Om de potentiaal op en buiten het aardoppervlak te kunnen beschrijven, moet worden aangenomen dat deze functie harmonisch is, hetgeen betekent dat er zich geen massa buiten het aardoppervlak mag bevinden. Slechts dan is de Laplace vergelijking geldig. Buiten het aardoppervlak bevindt zich echter de massa van de atmosfeer. Men kan dan met de Poisson vergelijking werken, waarbij de massa buiten het aardoppervlak moeten worden gemodelleerd. Gemakkelijker is het als de atmosfeer wordt gemodelleerd en van buiten het aardoppervlak naar binnen worden verplaatst. Dan kan de Laplace vergelijking blijven worden gebruikt. Dit wordt in paragraaf 7.3 behandeld. Er is ook bijvoorbeeld de aantrekking van maan en zon. De zwaartekracht-anomalieën zijn hiervoor al gereduceerd, zodat dit geen rol speelt bij de geoïdebepaling.

Nu de data zodanig zijn gereduceerd dat de potentiaal buiten de aarde inderdaad harmonisch is, kunnen we ons richten op de randvoorwaarde. De relatie tussen de onbekende stoorpotentiaal en de gemeten grootheden zwaartekracht, is een niet-lineaire relatie. Om het onderhavige probleem op te lossen wordt een linearisatie uitgevoerd. Daarvoor wordt een benadering voor het aardoppervlak dat al zeer dicht in de buurt ligt gekozen. Molodenskii introduceerde hiervoor de telluroïde. Dit vlak wordt gedefinieerd door de keuze van een normaalpotentiaalveld. De keuze is zodanig dat de potentiaal van een punt op het aardoppervlak  $W(P)$  gelijk is aan de normaalpotentiaal van het bijbehorende telluroïdepunt  $U(Q)$  langs de ellipsoïdische normaal. De hoogte van dit telluroïdepunt boven de ellipsoïde is de normaalhoogte  $H^*$  (Heiskanen&Moritz, 1967). Deze definitie van de telluroïde leidt tot de zogenaamde Marussi-mapping (Moritz, 1980a). Andere mappings zijn ook mogelijk, maar deze is het belangrijkste voor de praktijk (Heck&Seitz, 1992). De telluroïde is geen equipotentiaalvlak met een fysische betekenis zoals de geoïde, maar slechts een verzameling van punten.

Het verschil tussen de te bepalen potentiaal  $W$  en de normaalpotentiaal  $U$  in hetzelfde punt is de stoorpotentiaal  $T = W - U$ . Verder wordt gedefinieerd de vrijelucht zwaartekracht-anomalie volgens  $\Delta g = g_P - \gamma_Q$ , waarbij  $P$  het punt op het aardoppervlak is en  $Q$  het bijbehorende punt op de telluroïde. De randwaardevergelijking kan nu worden opgesteld door het aardoppervlak,  $W$  en  $g$  te schrijven als Taylorreeks ten opzichte van de respectievelijke benaderingen telluroïde,  $U$  en  $\gamma$ . Door de niet-lineaire termen te verwaarlozen vinden we de lineaire vergelijking (zie Pavlis, 1988)

$$m_Q \Delta g = T_Q + m_Q (\text{grad } T)_Q. \quad (7.2)$$

De modelcoëfficiënten  $m_Q$  worden bepaald door de gekozen Marussi-mapping en het coördinaatsysteem van het gekozen normaalveld. Heck (1988, 1989a, 1989b, 1990, 1991; Heck&Seitz, 1992) heeft uitputtend onderzocht door middel van iteratieve invulling van de lineaire oplossing in de oorspronkelijke niet-lineaire vergelijking, hoe groot de invloed van de niet-lineaire termen is op de uiteindelijke geöïde (of hoogteanomalie) voor verschillende randvoorwaardeproblemen. Voor het randvoorwaardeprobleem dat we hier volgen, het scalaire randvoorwaardeprobleem, bedraagt het effect in extreme gevallen maximaal één cm voor de geöïde. Voor dit geval kan daarom zonder problemen de gelineariseerde versie van het probleem worden gebruikt (Heck&Seitz, 1992).

Een volgende vereenvoudiging die wordt geïntroduceerd is door de coëfficiënten  $m_Q$  te berekenen in een ellipsoïdisch normaalveld, met een ellipsoïdisch coördinaatsysteem.

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T. \quad (7.3)$$

Deze randvoorwaardevergelijking wordt ook de fundamentele vergelijking van de geodesie in ellipsoïdische benadering genoemd. Het is niet bekend of met behulp van deze randvoorwaarde het mogelijk is een gesloten oplossing te vinden voor  $T$ . Dit kan wel als er ook nog bolbenadering en constante voerstraalbenadering wordt ingevoerd, wat betekent dat de coëfficiënten in de fundamentele vergelijking worden berekend in sferische benadering. De ellipsoïdische coördinaten in (7.3) worden vervangen door bolcoördinaten. Deze bolbenadering is toegestaan voor het vinden van de eerste oplossing omdat het probleem is gelineariseerd, en de bolbenadering alleen werkzaam is op het niveau van de stoorgrootheden. Het effect is van de orde van de afplatting  $\left(\frac{1}{300}\right)$ . We krijgen dan de fundamentele vergelijking van de geodesie in sferische benadering

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T. \quad (7.4)$$

Met behulp van de te vinden oplossing kan ook weer via een iteratief proces worden bepaald hoe groot de invloed is van de bolbenadering ten opzichte van de ellipsoïdische randvoorwaarde. Ellipsoïdische correcties zijn voor het eerst uitgerekend door Lelgemann (1970). Omdat deze ellipsoïdische correcties bij de combinatieoplossing niet zomaar kunnen worden aangebracht wordt hier straks nog apart op terug gekomen. We volgen daarbij niet de aanpak zoals geschetst in (Moritz, 1980a), maar de meer inzichtelijke aanpak van (Pavlis, 1988).

Molodenskii (Molodenskii e.a., 1962) heeft laten zien dat door de telluroïde als een reeks ten opzichte van een bol met constante voerstraal te schrijven voor elk van de termen van deze Taylorreeks een oplossing wordt gevonden in de vorm van Stokes integraal (zie Moritz, 1980a). Als hierbij Bruns vergelijking (2.2) wordt toegepast op de stoorpotentiaal  $T$  wordt niet de geöïdehoogte  $N$  verkregen, maar de hoogteanomalie  $\zeta$ ,

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} \quad (7.5)$$

welke de afstand tussen het aardoppervlak en de telluroïde is en ongeveer even groot is als de geoïdehoogte. De eerste term van de Taylorreeks levert

$$\zeta_0(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} St(\psi_{PQ}) G_0(Q) d\sigma, \quad (7.6)$$

en de tweede term

$$\zeta_1(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} St(\psi_{PQ}) G_1(Q) d\sigma. \quad (7.7)$$

Hierin is  $G_0(Q) = \Delta g(Q)$  en

$$G_1(Q) = \frac{R^2}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{h_R - h_Q}{l_{oQR}^3} \left\{ \Delta g(R) + \frac{3\gamma}{2R} \zeta_0(R) \right\} d\sigma. \quad (7.8)$$

Voor verdere uitleg van de variabelen, zie (Moritz, 1980a, sect. 43). De hogere orde termen  $\{\zeta_n; n > 1\}$  kunnen op een vergelijkbare manier worden beschreven, maar krijgen nog een extra term aan de rechterkant van de vergelijking. Wat belangrijk is voor ons om te concluderen, is dat de tweede term  $G_1$  naast de zwaartekrachtanomalie  $\Delta g$  en de hoogteanomalie  $\zeta_0$ , afhangt van de topografieverschillen. In (Heiskanen&Moritz, 1967) wordt afgeleid hoe met behulp van enkele kleine benaderingen de term  $G_1$  anders kan worden geschreven. De bijdrage  $\zeta_1$  ten gevolge van  $G_1$  kan worden geschreven in twee delen  $\zeta_{11}$  en  $\zeta_{12}$ , respectievelijk

$$\zeta_{11}(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} St(\psi) \left( -h \frac{\partial \Delta g}{\partial h} \right) d\sigma, \quad (7.9)$$

en

$$\zeta_{12} = -\frac{\Delta g}{\gamma} h = \frac{\partial \zeta}{\partial h} h. \quad (7.10)$$

De interpretatie hiervan bestaat uit drie stappen. Eerst wordt middels de term in (7.9) het effect bereikt dat de oppervlakte vrijelucht zwaartekrachtanomalie  $\Delta g(Q)$  zoals door Molodenskii wordt gebruikt, van het aardoppervlak naar de geoïde wordt gereduceerd. Daarna wordt de eerste term van de Molodenskii oplossing (de Stokes integraal) toegepast op deze gereduceerde zwaartekrachtanomalie, zie (7.6). En tot slot wordt de gevonden hoogteanomalie van geoïde naar aardoppervlak teruggebracht, met  $\zeta_{12}$  (7.10). De eerste term in de Molodenskii oplossing geeft namelijk de berekening van de hoogteanomalie op zeeniveau aan. Dit kan worden gezien doordat de  $\zeta_0$ -bijdrage gelijk is aan Stokes integraal.

In (Moritz, 1980a) wordt getoond dat de terreincorrectie al een zeer goede benadering is voor de  $G_1$ -term. De combinatie van vrijelucht zwaartekrachtanomalie en terreincorrectie wordt Faye-anomalie genoemd. Voor een eenvoudige berekening van de hoogteanomalieën op basis van de eerste twee termen van de Molodenskii reeks, kunnen dus deze Faye-anomalieën worden gebruikt waarbij nog een kleine, eenvoudige correctie moet worden aangebracht. Voor veel praktische berekeningen is dit nauwkeurig genoeg.

Wordt alleen de eerste term van de Molodenskii-reeks gebruikt, dan heet dat constante voerstraal benadering. Alleen de eerste term van de reeksontwikkeling van de telluroïde, de bolstraal zelf, wordt gebruikt.

Het effect van de tweede term van Molodenskii, de Stokes integraal toegepast op  $G_1$ , hangt sterk af van de topografie (hoogten) en topografievariatiën. Uit een voorbeeld van (Li e.a., 1995) blijkt dat voor bergachtig gebied met hoogten van 0 tot 3500 m, met maximale verschillen van 800 m binnen enkele km, bijdragen aan de geoïde worden gegeven via de  $G_1$ -term van de orde van één tot enkele dm. Voor Nederland zijn de effecten, door het ontbreken van bergen en hoogteverschillen, verwaarloosbaar. In Zuid-Limburg en omliggend gebied in België is het effect maximaal 2 mm over korte afstanden.

De hoogteanomalie wordt vaak afgezet ten opzichte van de ellipsoïde. Het vlak dat dan wordt verkregen wordt quasi-geoïde genoemd. Dit vlak is geen equipotentiaalvlak, zoals de geoïde. Het ligt wel vlak bij de geoïde. De maximale verschillen zijn op aarde in de orde van enkele decimeters tot een meter in berggebieden (Heiskanen&Moritz, 1967). Typische verschillen in Europa zijn van decimeter-orde (Brouwer&De Min, 1994). De quasi-geoïde vertoont daarbij een iets grilliger verloop dan de geoïde, ten gevolge van het topografie-effect.

Tenslotte wordt nog eens puntsgewijs samengevat wat de benaderingen zijn die worden aangebracht om de eerste term van de Molodenskii reeksoplossing te vinden.

- Atmosfeerreductie (verplaatsing naar ellipsoïde).
- Linearisatie (verwaarlozen hogere orde termen).
- Sferische benadering (modelcoëfficiënten berekenen met bolcoördinaten in plaats van ellipsoïdische coördinaten).
- Constante voerstraal (alleen de eerste term van de Molodenskii reeks, ofwel de Stokes integraal).

## 7.2 Stokes oplossing

Op dezelfde manier als in de vorige paragraaf is gedaan kan ook een randvoorwaardeprobleem worden gedefinieerd zoals dat door Stokes (1849) is gedaan. Daarbij is niet het aardoppervlak de rand, maar de geoïde. En niet de telluroïde is het benaderende oppervlak dat wordt gebruikt voor de linearisatie, maar de ellipsoïde. Een extra probleem dat daardoor ontstaat is dat de massa tussen de geoïde en het aardoppervlak ook dient te worden verwijderd, ten einde de stoorpotentiaal harmonisch te laten zijn. Hiervoor is kennis nodig van de dichtheid van deze massa, wat in de praktijk onmogelijk is op te lossen. Dit is ook de reden geweest voor Molodenskii om te zoeken naar een andere oplossing voor de bepaling van de vorm van de aarde.

Na het weghalen van het atmosfeer-effect en de topografie-aantrekking wordt bij het Stokes probleem verder dezelfde weg gevolgd als bij Molodenskii. Er wordt een lineari-



satie uitgevoerd en een bolbenadering, hier van de ellipsoïde in plaats van de telluroïde. Voor de bolbenadering moeten ellipsoidische correcties worden aangebracht. Vervolgens wordt een constante voerstraalbenadering aangenomen, waarna de uiteindelijke Stokes integraal als oplossing van het Stokes probleem kan worden bepaald.

Het verschil tussen de aanpak volgens Molodenskii en Stokes is dat bij de eerste de hoogteanomalie (en vervolgens eventueel de quasi-geoïdehoogte), en bij de laatste de geoïde en de geoïdehoogte wordt berekend. Bij elk van deze twee hoort een verschillend hoogtesysteem, respectievelijk normaalhoogten en orthometrische hoogten. Er geldt

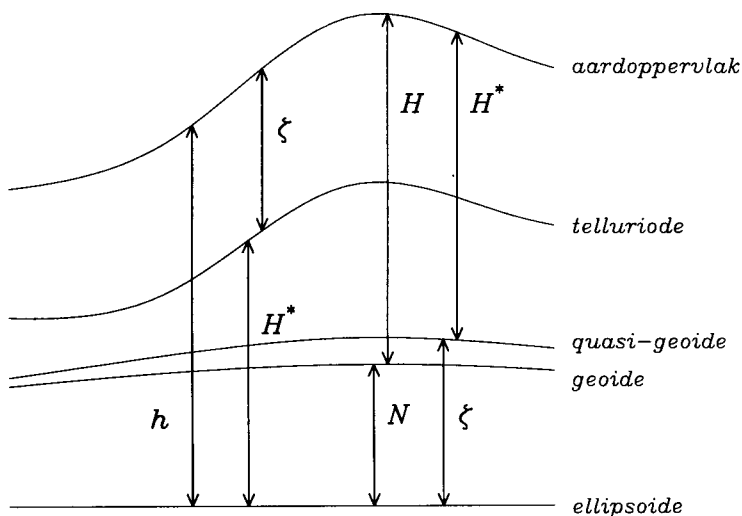
$$N + H = \zeta + H^* = h, \quad (7.11)$$

met  $N$  de geoïdehoogte,  $H$  de orthometrische hoogte,  $\zeta$  de hoogte-anomalie en quasi-geoïdehoogte,  $H^*$  de normaalhoogte, en  $h$  de ellipsoidische hoogte. De relaties zijn weergegeven in figuur 7.1. Het verschil tussen de orthometrische hoogte en de normaalhoogte van een punt, en dus ook tussen de geoïdehoogte en de quasi-geoïdehoogte kan worden benaderd met (Heiskanen&Moritz, 1967)

$$N - \zeta = H^* - H = \frac{\bar{g} - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} H \approx \frac{\Delta g_{Bo}}{\gamma} H. \quad (7.12)$$

Hierin is  $\bar{g}$  de gemiddelde zwaartekracht tussen geoïde en aardoppervlak, en  $\bar{\gamma}$  de gemiddelde normaalzwaartekracht tussen ellipsoïde en telluroïde.  $\Delta g_{Bo}$  is de Bouguer-anomalie. Deze formule geldt niet voor ruw, bergachtig terrein (Li e.a., 1995).

Het verschil tussen geoïde en quasi-geoïde is maximaal in hooggebergten (door de directe invloed van topografie en topografiehellings in de quasi-geoïde) en bedraagt maximaal 1-2 m (Heiskanen&Moritz, 1967, p.328). In Nederland is er praktisch geen verschil tussen de geoïde en de quasi-geoïde. De grootste Bouguer-anomalieën komen voor in het oostelijk deel van Noord-Brabant en hebben een waarde van ongeveer -30 mgal. De



**Figuur 7.1** Relaties tussen aardoppervlak, telluroïde, quasi-geoïde, geoïde en ellipsoïde.

NAP-hoogte is daar ongeveer 50 m, zodat een verschil tussen de geoïde en de quasi-geoïde van ongeveer 1.5 mm voorkomt. Voor de gebieden in Limburg waar meer topografie voorkomt is de Bougueranomalie weer kleiner, waardoor ook daar het verschil niet significant is. In Nederland mogen de verschillen tussen de twee soorten hoogten (orthometrisch en normaal) en de twee referentievlakken (geoïde en quasi-geoïde) dus helemaal worden verwaarloosd.

### 7.3 Atmosfeer-effect

Zoals genoemd in paragraaf 7.1 moet de massa van de atmosfeer worden verwijderd omdat alleen bij afwezigheid van massa buiten de rand de te vinden stoorpotentiaal op en buiten de rand een harmonische functie is en aan Laplace vergelijking kan voldoen. Ecker&Mittermayer (1969) hebben zich met dit probleem bezig gehouden, en gebruikten daarbij een ellipsoïdisch model voor het aardoppervlak. Moritz (bijvoorbeeld 1974, 1980a) volgt een vergelijkbare aanpak, maar met een bol als benadering voor de aarde waarbij een voldoende nauwkeurigheid wordt bereikt voor ons doel (Moritz, 1974). Bij deze aanpak wordt niet alleen de atmosfeermassa buiten het aardoppervlak weggehaald, maar buiten de referentie-ellipsoïde. Dit lijkt wat onnatuurlijk, maar maakt dat het probleem veel eenvoudiger is op te lossen, terwijl er slechts een kleine verandering van de dichtheid van de massa's tussen aardoppervlak en ellipsoïde wordt veroorzaakt. Het effect van het weghalen van de atmosfeer buiten de ellipsoïde en het verplaatsen ervan binnen de ellipsoïde op de gemeten zwaartekracht is onder andere door voornoemde auteurs uitgevoerd. Al in 1970 (IAG, 1970) is door de International Association of Geodesy (IAG) een tabel gepubliceerd met deze waarden, die alleen afhangen van de hoogte van het betreffende punt boven zeeniveau. Deze waarden kunnen als eenvoudige formule worden geschreven door (Wenzel, 1985)

$$\delta g_A = 0.874 - 9.9 \cdot 10^{-5} H + 3.5625 \cdot 10^{-9} H^2 . \quad (7.13)$$

Hierin is  $H$  in m, en  $\delta g_A$  in mgal. Dit effect moet bij de zwaartekrachtanomalieën worden opgeteld. Het indirect effect op de geoïde door de atmosfeerverplaatsing bedraagt op zeeniveau ongeveer 7 mm. Dit voor Nederland constante effect mag worden verwaarloosd, zodat alleen de zwaartekrachtanomalieën hoeven te worden gecorrigeerd.

### 7.4 Ellipsoïdische correcties

Omdat bij de geoïdeberekening voor Nederland de ellipsoïdische correcties in rekening worden gebracht zal hier nader worden ingaan op de berekening daarvan. Daarbij wordt (Pavlis, 1988) gevolgd. In de fundamentele vergelijking (7.3) kan de ellipsoïdische coördinaat  $h$  als Taylorreeks worden geschreven waarbij deze wordt ontwikkeld rond de bolcoördinaat  $r$ . De randwaardevergelijking kan worden geschreven als

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{r} - \frac{2}{r}T - \varepsilon_{e^2} + O(e^4) \quad (7.14)$$

De hogere orde termen van deze ontwikkeling tot en met de orde van de afplatting  $e^2$  worden hier geschreven als  $\varepsilon_{e^2}$ , welke functies van  $T$  zijn. De termen  $\varepsilon_{e^2}$  kunnen worden

overgebracht naar de andere kant

$$\Delta g + \varepsilon_{e^2} = -\frac{\partial T}{r} - \frac{2}{r}T. \quad (7.15)$$

De oplossing hiervan wordt gegeven door de gewone Stokes integraal, waarbij binnen de integraal staat  $(\Delta g + \varepsilon_{e^2})$ . De  $\varepsilon_{e^2}$  termen zorgen voor de ellipsoïdische correctie tot orde  $e^2$  van de Stokes integraal.

De term  $\varepsilon_{e^2}$  bestaat uit drie delen, waarvan er twee vrijwel gelijk zijn, zodat

$$\varepsilon_{e^2} = 2 \varepsilon_h + \varepsilon_\gamma, \quad (7.16)$$

met

$$\varepsilon_h = e^2 \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial T}{r \partial \varphi}, \quad (7.17)$$

en

$$\varepsilon_\gamma = - \left\{ 6J_2 \frac{a^2}{r^3} P_2(\sin \varphi) - \frac{3\omega^2 r^2}{GM} \cos^2 \varphi \right\} T. \quad (7.18)$$

Voor een interpretatie van deze termen wordt verwezen naar (Pavlis, 1988). De deeltermen van  $\varepsilon_{e^2}$  hangen af van  $T$ , maar hebben een veel kleinere orde van grootte dan  $\Delta g$ , waardoor  $T$  slechts bij benadering bekend hoeft te zijn. De ellipsoïdische correctie voor de geïde kan daarom iteratief worden berekend of uit een al bekend geïdemodel. Dit laatste is gedaan in de laatste globale geopotentialmodellen van Ohio State University OSU89 (Rapp&Pavlis, 1990) en OSU91 (Rapp e.a., 1991), zie ook hoofdstuk 5. Hierin is de sferische benadering in de Stokes integraaloplossing gecorrigeerd. Het ellipsoïdische effect in en rondom Nederland zoals opgenomen in deze modellen wordt weergegeven in figuur 7.2. Dit komt overeen met de berekening door Lelgemann (1970). Het blijkt dat het een langgolvig effect betreft. In Nederland komen maximale verschillen van een paar cm over 200 km voor.

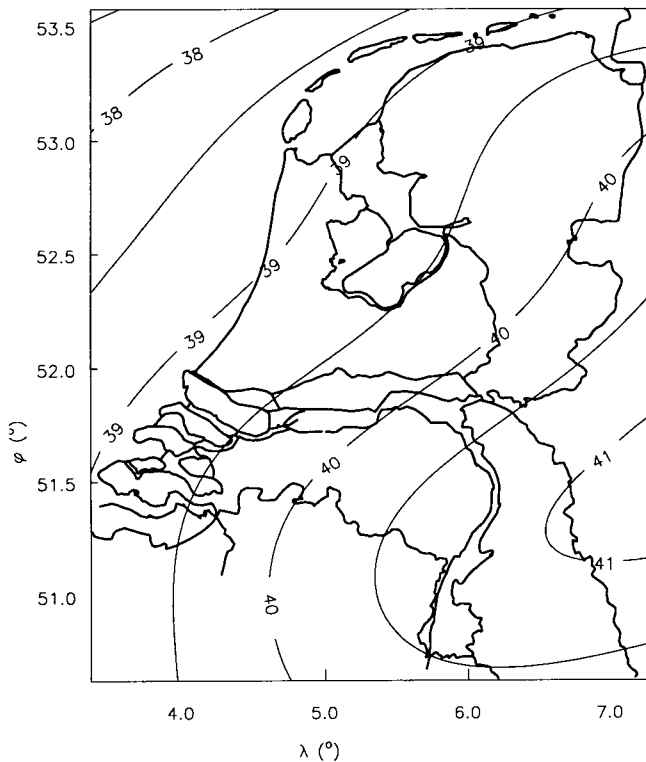
In hoofdstuk 2 is aangetoond dat in de combinatieoplossing (met geopotentialmodel en binnengebieddata) slechts een klein deel van de uiteindelijke geïde wordt bepaald uit het geopotentialmodel. Zie hiervoor figuur 2.25. Er wordt dus ook maar een gedeelte van de ellipsoïdische correctie aangebracht in de combinatieoplossing. Het gedeelte dat nog moet worden aangebracht wordt beschreven door

$$\delta N_\varepsilon(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma_o} St_2^*(\psi) (\varepsilon_{e^2}) d\sigma. \quad (7.19)$$

Als de spectrale coëfficiënten  $\varepsilon_{nm}$  van  $\varepsilon_{e^2}$  worden berekend dan kan de geïdebijdrage ook worden beschreven als

$$\delta N_\varepsilon(P) = \frac{R}{2\gamma} \sum_{n=2}^{180} \frac{2}{n-1} (1 - w_n^*(\psi_o)) \sum_{m=-n}^n \varepsilon_{nm} \bar{Y}_{nm}(P). \quad (7.20)$$

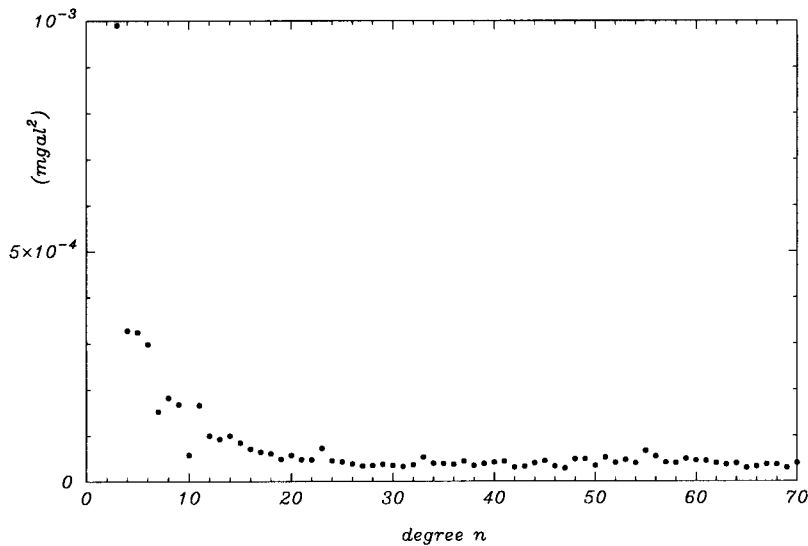
De coëfficiënten  $\varepsilon_{nm}$  zijn berekend, zoals ook is gedaan door (Rapp&Pavlis, 1990) en (Rapp e.a., 1991) voor de modellen OSU89 en OSU91. De resultaten komen overeen met die van Pavlis (1988).



**Figuur 7.2** Ellipsoidische correctie voor de sferische benadering in Stokes integraal in en rondom Nederland. In cm, isolijneninterval is 0.5 cm.

In figuur 7.3 zijn de signaalgraadvarianties gegeven van de ellipsoidische correctietermen, uitgerekend voor zwaartekrachtanomalieën. De ellipsoidische correctie bestaat niet alleen maar uit bijdragen van de allerlaagste graden. Wel blijkt dat de meeste energie van dit signaal zich op de zeer lage graden  $n$  bevindt. Omdat de spectrale gewichten voor  $n < 6$  bij alle kernfuncties ongeveer gelijk zijn aan 1 voor het geopotentiaalmodel (zie weer figuur 2.25), zal het grootste deel van de ellipsoidische correctie in de combinatieoplossing zijn opgenomen. Er bevindt zich echter ook nog een deel van het signaal op de hogere graden. Afhankelijk van de gebruikte kernfunctie in de combinatieberekening, zal meer of minder van dit signaal wel of niet zijn opgenomen. Om te kijken of dit deel nog een significante ( $> 1$  cm) correctie aan de totale geoïde uit de combinatiemethode oplevert, is voor de twee kernfuncties van Molodenskii (de gewone combinatiemethode uit paragraaf 2.2) en de gecombineerde Meissl/Wong&Gorekernfunctie (met  $L = 32$ ) de restcorrectie uitgerekend. Dit is gedaan met (7.20). De figuren 7.4 en 7.5 laten deze effecten zien voor de gewone combinatieoplossing (2.18) en de combinatieoplossing met de gecombineerde Meissl/Wong&Gore  $L = 32$  kernfunctie.

Hieruit blijkt dat inderdaad minder langgolvig signaal wordt weggelaten bij de gecombineerde Meissl/Wong&Gore methode, dan bij de gewone combinatie. De hoge frequenties worden in beide methoden weggelaten. Het gedeelte van de ellipsoidische correctie van de Stokes integraaloplossing dat wordt weggelaten in de combinatieoplossing heeft



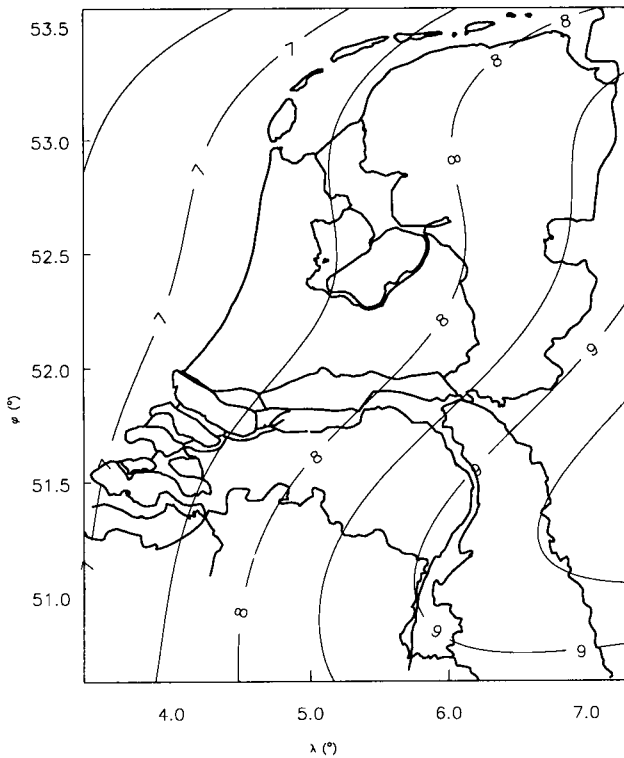
**Figuur 7.3** Signaalgraadvarianties van de ellipsoïdische correcties, in  $\text{mgal}^2$ .

toch nog een amplitude van 1-2 cm over afstanden van 50-150 km, en deze correcties moeten worden aangebracht in de combinatieoplossingberekening. In (De Min, 1995b) wordt dit probleem uitgebreider besproken, en worden voorbeelden gegeven van het effect voor heel Europa. Daaruit blijkt dat met name in bergachtige gebieden (waar grotere schietloodafwijkingen voorkomen) het effect een nog grotere amplitude kan hebben. In Europa komen maximale waarden van 10 cm over 100 km en 20 cm over 300 km voor.

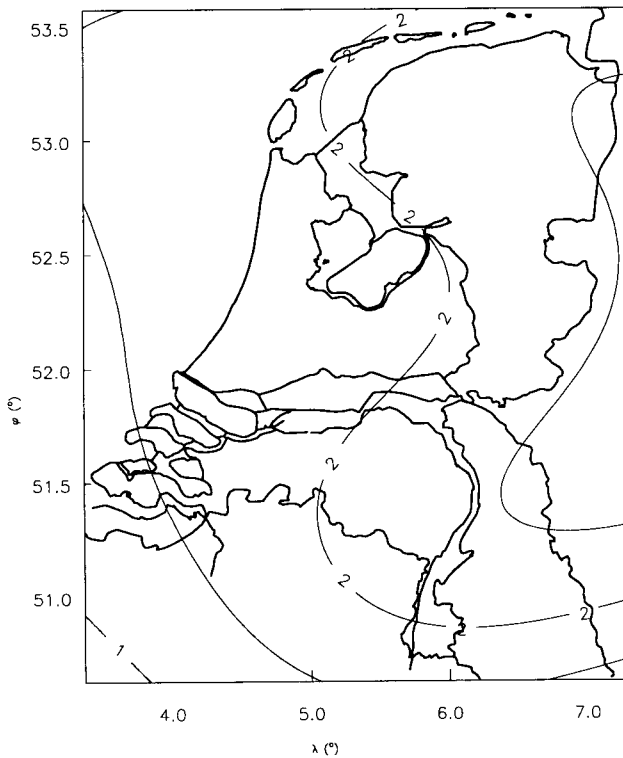
## 7.5 Conclusies

In dit hoofdstuk is ingegaan op de achtergronden van de geöïdebepaling met behulp van Stokes integraal. We hebben gezien dat een modellering met centimeter-precisie in het algemeen niet wordt bereikt door simpelweg de Stokes integraal toe te passen op zwaartekrachtanomalieën. De eigenlijke geöïdebepaling vindt plaats via het Molodenskii probleem. Hierbij moet naast de zwaartekrachtinformatie ook informatie over de terreinhoogten zijn gegeven. En tevens moeten de gevonden hoogteanomalieën of quasi-geöïdehoogten nog worden omgerekend naar geöïdehoogten. Voor Nederland kunnen we ons voor de geöïdeberekening echter beperken tot de eerste term van de Molodenskii-reeks, door het ontbreken van significante topografie(verschillen). Hierdoor vallen ook de quasi-geöïde en de geöïde samen.

Twee correcties moeten wel worden aangebracht om het rekenmodel cm-precisie (voor relatieve geöïdehoogten) te geven. Ten eerste is dit het aanbrengen van atmosfeeraan-trekkings-correcties aan de zwaartekrachtwaarden. Ten tweede moeten ellipsoïdische correcties voor het binnengebied worden aangebracht.



**Figuur 7.4** Ellipsoïdische correctie voor een 5°-binnengebied voor de gewone combinatieoplossing in en rondom Nederland. In cm, isolijneninterval is 0.5 cm.



**Figuur 7.5** Ellipsoïdische correctie voor een 5°-binnengebied voor de Meissl/Wong&Gore  $L = 32$  combinatieoplossing in en rondom Nederland. In cm, isolijneninterval is 0.5 cm.

## 8 Geoïde voor Nederland

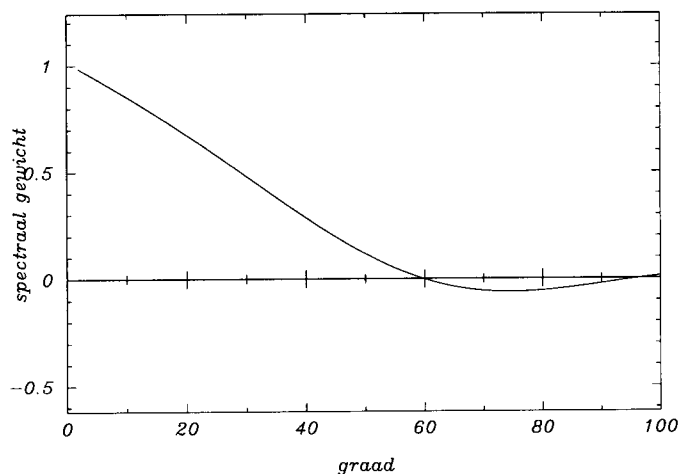
In dit hoofdstuk wordt eerst nog eens precies uitgelegd welke methoden worden gebruikt en welke formules zijn toegepast. Vervolgens worden alle gebruikte zwaartekrachtwaarden en hun bijdragen aan de gravimetrische geoïde voor Nederland gepresenteerd in figuren. De gravimetrische geoïde wordt dan vergeleken met de externe geoïde-informatie uit GPS/waterpas-gegevens, en met schietloodafwijkingen. Op basis van deze vergelijkingen, kunnen eventuele langgolvlige verschillen met de gravimetrische geoïde worden gecorrigeerd. Dit levert dan de momenteel best mogelijke geoïde voor Nederland op in paragraaf 8.5.

Deze best mogelijke geoïde voor Nederland wordt daarna vergeleken met de vorige geoïde voor Nederland (Van Willigen, 1985) en de geoïde van Duitsland (Denker, 1989) die aan de Duitse grens overlapt. De geoïde, die is berekend ten opzichte van GRS80/WGS84/ETRS89 (waar we hier geen onderscheid tussen maken, hetgeen is toegestaan voor praktijktoepassingen) kan vervolgens worden getransformeerd naar andere referentie-ellipsoïdes. De belangrijkste daarvan is de Bessel-ellipsoïde, die in Nederland wordt gebruikt voor het Rijksdriehoekssysteem (RD). Hier zitten nog wat haken en ogen aan die in paragraaf 8.7 worden doorgenomen.

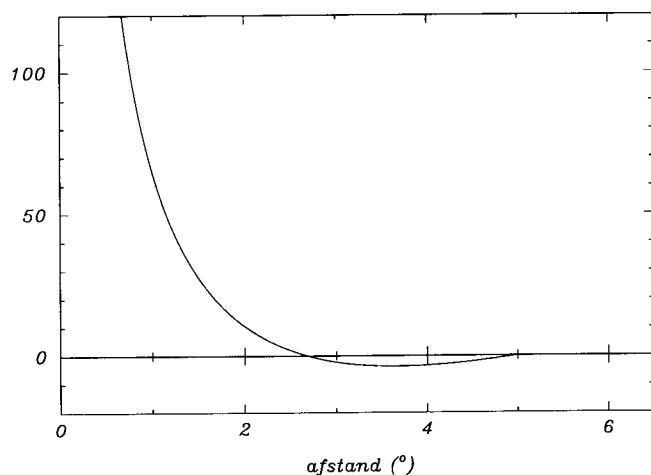
Met nadruk wordt nog eens gesteld dat vooral de geoïdehoogteverschillen van belang zijn. Niet alleen zijn deze veel beter te bepalen dan absolute geoïdehoogten, ze zijn ook het belangrijkste voor de toepassingen in de praktijk.

### 8.1 Procedure voor de geoïdeberekening voor Nederland

Voor Nederland wordt de gravimetrische geoïde uitgerekend. Er wordt hier geen onderscheid gemaakt tussen geoïde, quasi-geoïde en NAP-vlak. Voor de berekening worden het globale geopotentialmodel OSU91A tot en met graad en orde 360 en de in Europa beschikbare data in een combinatieoplossing gebruikt. De gebruikte kernfunctie in de combinatieoplossing is de Stokes functie met een gecombineerde Meissl/Wong&Gore kernfunctiemodificatie, waarbij is gekozen dat de graden tot en met  $L = 32$  worden afgetrokken van de volledige Stokes functie. De spectrale gewichten en de daaruit volgende kernfunctie worden weergegeven in de figuren 8.1 en 8.2. De berekening wordt uitgevoerd volgens methode A (*remove-restore*, zie paragraaf 2.2). Op basis van de beschikbare zwaartekrachtdata in Europa worden gemiddelde zwaartekrachtanomalieën voor blokgebieden van 3'x5' bepaald. Dit wordt gedaan met kleinste-kwadratenpredictie en een steungebied van  $0.06^\circ$  voor elk blokgebied. De gebruikte covariantiefunctie wordt beschreven door (4.20), en de standaardafwijkingen van de puntwaarden zijn gebruikt voor de berekening van de gewichten om een gewogen gemiddelde te verkrijgen. De data zijn gecorrigeerd voor de atmosfeeraantrekking. In Nederland wordt een 3'x5' geoïdegrid uitgerekend door numerieke integratie van Stokes integraal over de gemid-



**Figuur 8.1** Spectrale gewichten  $w_n^{MWG32}$  van gecombineerde Meissl/Wong & Gore kernfunctiemodificatie met  $L = 32$  en  $\psi = 5.0^\circ$ .



**Figuur 8.2** De binnengebied kernfunctie  $St_2(\psi)$  bij de  $Q_n^{MWG32}$ -coëfficiënten uit figuur 8.1, die is gebruikt voor de gravimetrische geoïdeberekening voor Nederland.

delde zwaartekrancht anomalieën. De geoïdeberekeningspunten liggen precies in het midden van zwaartekracht blokgebieden. Er wordt een binnengebied gebruikt van  $5.0^\circ$ , dat wil zeggen dat als het middelpunt van een blokgebiedje binnen  $5^\circ$  afstand ligt van het geoïdeberekeningspunt, dat dan zijn bijdrage aan de geoïde wordt meegenomen. Het indirecte effect van de geoïde, door reductie van de massa's buiten de geoïde, wordt verwaarloosd in Nederland. De ellipsoïdische correctie van de binnengebieddata wordt aan de geoïde toegevoegd, middels de berekende sferisch harmonische coëfficiënten van deze correctieterm.



Er wordt een formele foutberekening uitgevoerd voor de geoïde. De ruisfout van de geopotentialcoëfficiënten en de afbreekfout worden berekend middels graadvarianties. Voor de gemiddelde blokwaarden in het binnengebied zijn foutvarianties en foutcovarianties met buurblokken bepaald, waarbij dezelfde signaalcovariantiefunctie als voor de berekening van gemiddelde blokwaarden met kleinste-kwadraten predictie is gebruikt. De meetruis van de puntwaarden is inbegrepen in de fout. De fout(co)varianties van de gemiddelde blokwaarden zijn voortgeplant naar de geoïdefout.

De formele geoïdeprecisie is slechter dan het gewenste cm-niveau. De fout is echter met name langgolvig van karakter. Op basis van beschikbare GPS/waterpas-geoïdehoogten en/of schietloodafwijkingen kan een langgolvige correctie aan de gravimetrische geoïde worden aangebracht. Dit levert een met GPS/waterpassen verbeterde geoïde op.

In tabel 8.1 staan alle opeenvolgende stappen genoemd die worden gevolgd bij de bepaling van de geoïde voor Nederland. Referenties naar de gebruikte vergelijkingen zijn daar waar van toepassing opgenomen.

**Tabel 8.1** Schema met de volledige berekeningsprocedure van de gravimetrische geoid voor Nederland.

1	Verzamel geopotiaalmodelcoëfficiënten $\overline{\Delta C}_{nm}$ inclusief foutvarianties $\sigma_{\overline{\Delta C}_{nm}}^2$	
2	Verzamel zwaartekrancht anomalieën $\Delta g_i$ en $\overline{\Delta g}$ in een gebied tenminste tot aan $\psi_o = 5^\circ$ vanaf alle geoidberekeningspunten inclusief meetruiswaarden	
3	Bereken gemiddelde blokwaarden voor gebieden van $3' \times 5'$ , en bereken $\sigma_{\overline{\Delta g} \overline{\Delta g}'}$	(4.7) (4.17)
4	Breng atmosfeercorrectie $\delta g_A$ aan	(7.13)
5	Bereken $N_1(P) = R \sum_{n=2}^{360} \sum_{m=-n}^n \overline{\Delta C}_{nm} \overline{Y}_{nm}(\varphi, \lambda)$	(2.7)
6	Bereken $\overline{\Delta g}_{ggm}(Q) = \gamma \sum_{n=2}^{360} (n-1) \sum_{m=-n}^n \overline{\Delta C}_{nm} \overline{Y}_{nm}(\varphi, \lambda)$	(A.11)
7	Bereken $N_2(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{i, \psi_{PQ} < \psi_o} (\overline{\Delta g}_Q - \overline{\Delta g}_{ggm})$ $\int_{\varphi_Q - \frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_Q + \frac{\Delta\varphi}{2}} \int_{\lambda_Q - \frac{\Delta\lambda}{2}}^{\lambda_Q + \frac{\Delta\lambda}{2}} St_2^{MWG32}(\psi_{P, \varphi, \lambda}) \cos \varphi d\lambda d\varphi$ <p style="text-align: center;">met <math>Q</math> middelpunt van blokje <math>i</math></p>	(2.19)
8	Bereken $\delta N_\epsilon = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma_o} St_2^{MWG32}(\psi) \epsilon_{\overline{\Delta g}} d\sigma$	(7.20)
9	Bereken $N_{grav} = N_1 + N_2 + \delta N_\epsilon$	(2.18)
10	Bereken omissiefout $\sigma_1^2 = R^2 \sum_{n=2}^{360} \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 (Q_n^{MWG32}(\psi_o))^2 \epsilon_n 2(1 - P_n(\cos \psi))$	(2.61)
11	Bereken afbreekfout $\sigma_2^2 = \left(\frac{R}{2\gamma}\right)^2 \sum_{n=361}^{10000} (Q_n^{MWG32}(\psi_o))^2 c_n 2(1 - P_n(\cos \psi))$	(2.64)
12	Bereken omissiefout binnengebied data $\sigma_3^2$ $\sigma_3^2 = \sum_i \sum_{i'} (w_{iP_1}^{St} - w_{iP_2}^{St}) (w_{i'P_1}^{St} - w_{i'P_2}^{St}) \sigma_{\overline{\Delta g} \overline{\Delta g}'}$	(2.66)
13	Bepaal de discretisatiefout $\sigma_{4,N}$	
14	Bereken totale fout $\sigma_{\Delta N} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}$	
15	Vergelijk met GPS/H en $\xi, \eta$	
16	Bepaal een met GPS/H verbeterde geoid	
17	Bepaal de precisiemaat $\sigma_{\Delta N}$ voor de GPS/H verbeterde geoid	

## 8.2 Berekening van de gravimetrische geoïde

De gravimetrische geoïde voor Nederland is berekend op basis van de data uit het globale geopotentialmodel OSU91A tot en met graad en orde 360 (Rapp e.a., 1991) en de 3'x5' gemiddelde blokwaarden tot op 5° van ieder geoïdeberekeningspunt, die zijn beschreven in paragraaf 3.4 en paragraaf 4.5. Aan de 3'x5' gemiddelde zwaartekrachtwaarden is een atmosfeercorrectie aangebracht volgens (7.13). Er is geen tweede-orde term voor de normaalzwaartekracht toegevoegd, omdat in het binnengebied geen grote hoogten voorkomen. De ellipsoïdische correcties, die moeten worden aangebracht volgens paragraaf 7.4, vergelijking (7.20), is niet aan de 3'x5' data aangebracht, maar deze correctie is apart berekend en toegevoegd aan de geoïde, met de spherisch harmonische coëfficiënten die zijn berekend voor de ellipsoïdische correctietermen.

In figuur 8.4 zijn de zwaartekrancht-anomalieën getekend van het globale geopotentialmodel OSU91A, tot en met graad en orde 360. In figuur 8.5 staan de residu zwaartekrancht-anomalieën (de 3'x5' gemiddelde waarden met aftrek van de OSU91A-waarden). Uit figuur 8.5 blijkt dat er nauwelijks langgolvig signaal ( $\lambda > 50$  km) over is in de residu zwaartekrancht-anomalieën binnen Nederland. Voor heel Europa geldt een gemiddeld verschil van 0.66 mgal.

Figuur 8.6 geeft de geoïdebijdrage in Nederland van het globale geopotentialmodel OSU91A tot en met graad en orde 360. De gehele mondiale bijdrage is in rekening genomen ( $Q_n^*(\psi_o) = \frac{2}{n-1}$ ). Figuur 8.7 geeft de geoïdebijdrage in Nederland van de residu zwaartekrancht-anomalieën zoals ze zijn weergegeven in figuur 8.5. Voor elk geoïdeberekeningspunt is de bijdrage van deze residu zwaartekrancht-anomalieën gebruikt als de afstand tussen het geoïdeberekeningspunt en het midden van het betreffende blokgebied kleiner is dan 5° ( $\approx 556$  km).

De totale gravimetrische geoïde voor Nederland bestaat uit de som van de twee gegeven delen in de figuren 8.6 en 8.7, en de ellipsoïdische correctie berekend voor het 5°-binnengebied, en zoals weergegeven in figuur 7.5. Deze totale gravimetrische geoïde wordt weergegeven in figuur 8.8.

De precisie van de geoïde wordt bepaald door de bijdrage van 4 fouten. Het betreft de vier datafouten zoals behandeld in paragraaf 2.5. De discretisatiefout is klein en wordt geschat op 2 mm. De precisie van de gravimetrische geoïde wordt verder samengesteld uit de ruis van de gebruikte geopotentialcoëfficiënten en de afbreekfout. De afbreekfout is klein, en bedraagt slechts enkele mm, terwijl de geopotentialcoëfficiënten ruis van dm-orde is voor grotere afstanden. Hier komt de fout ten gevolge van de ruis van de gemiddelde blokwaarden nog bij. Deze verschilt wat per gebied, maar een gemiddelde waarde hiervoor is 2 mm. De totale geoïdeprecisie volgt uit de som van de drie delen, en deze is weergegeven in figuur 8.3. De precisie wordt beschreven door de vergelijking

$$\sigma_{\Delta N}^2 \text{ (cm}^2\text{)} = (0.3)^2 + (0.07)^2 \cdot d_{P_1 P_2}^2 \text{ (in km)} . \quad (8.1)$$

$d_{P_1 P_2}$  is de afstand tussen de twee geoïdeberekeningspunten. Als één of beide geoïdeberekeningspunten dicht in de buurt van België of de Noordzee liggen dan komt er nog

een foutbijdrage van de binnengebieddata bij. De totale fout wordt dan beschreven door

$$\sigma_{\Delta N}^2 (\text{cm}^2) = (0.3)^2 + (0.07)^2 \cdot d_{P_1 P_2}^2 (\text{in km}) + \sigma_{\text{België}}^2 + \sigma_{\text{Noordzee}}^2 ; \quad (8.2)$$

met

$$\sigma_{\text{België}} (\text{in cm}) = 1.0 \frac{d_{P_1 P_2}}{d_{\text{België}}} \quad d_{\text{België}} > 10 \text{ km} \quad (8.3)$$

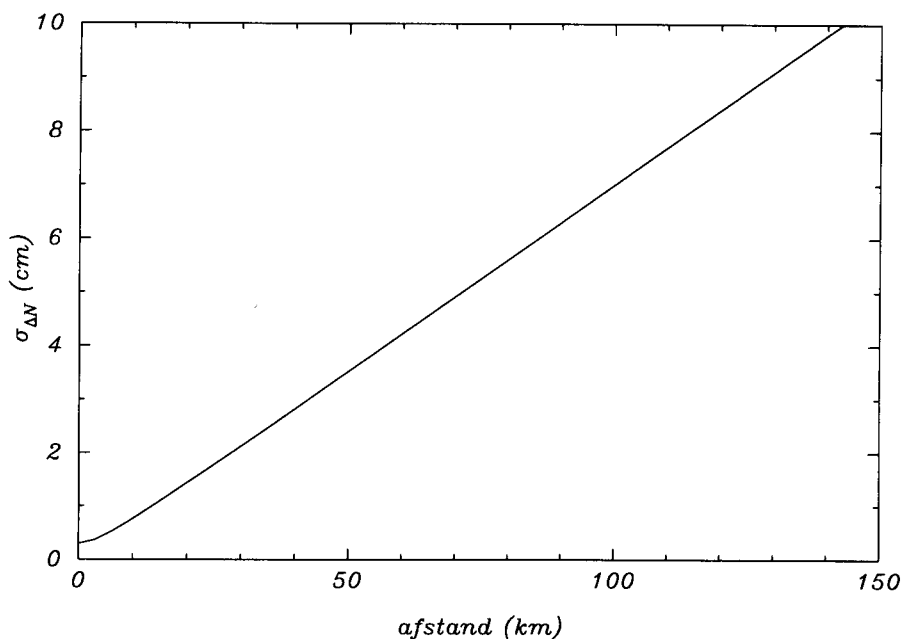
$$\sigma_{\text{België}} (\text{in cm}) = 0.10 d_{P_1 P_2} (\text{in km}) \quad d_{\text{België}} < 10 \text{ km} .$$

en

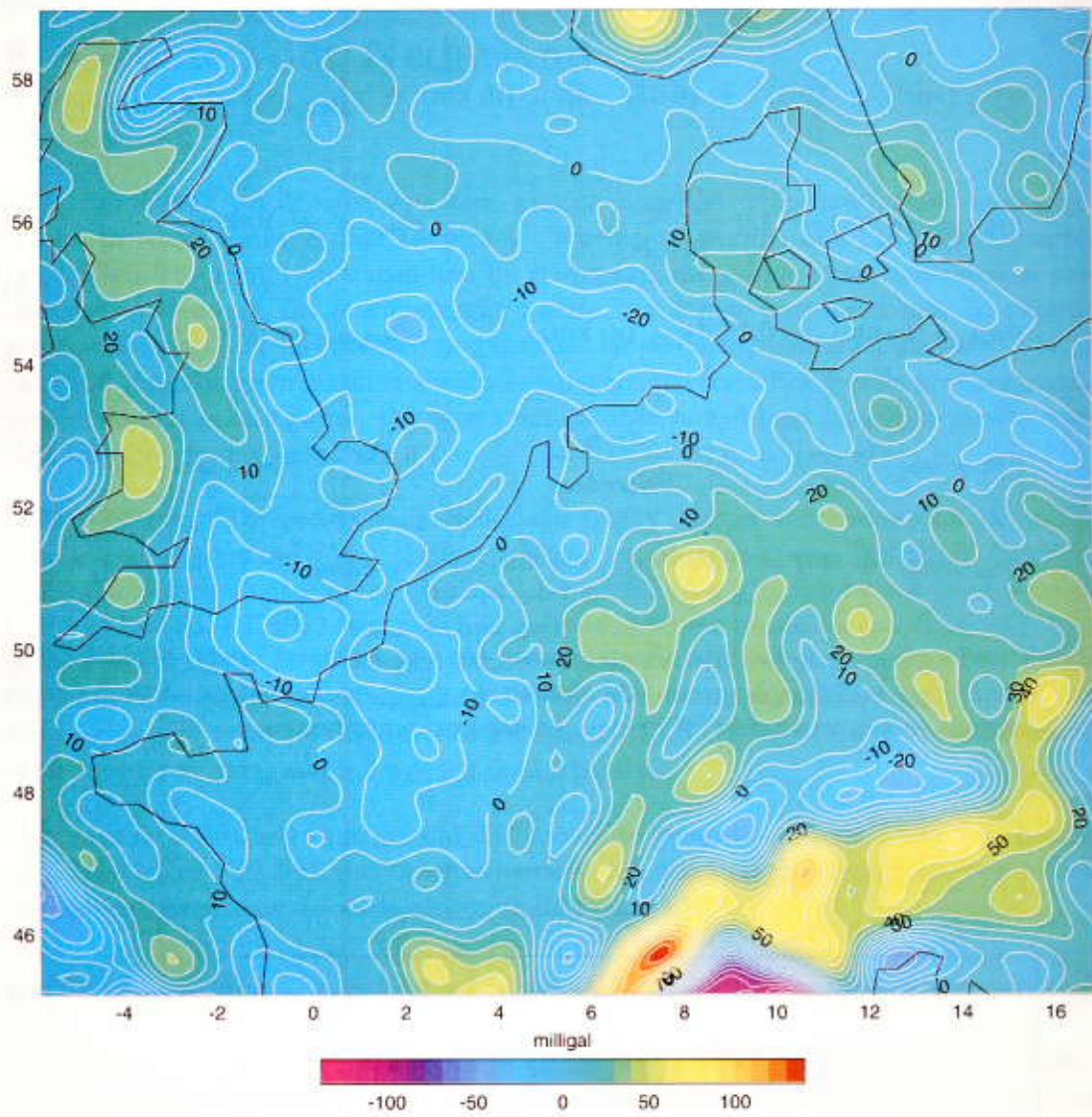
$$\sigma_{\text{Noordzee}} (\text{in cm}) = 0.25 \frac{d_{P_1 P_2}}{d_{\text{Noordzee}}} \quad 7.5 \text{ km} < d_{\text{Noordzee}} < 30 \text{ km} \quad (8.4)$$

$$\sigma_{\text{Noordzee}} (\text{in cm}) = 0.035 d_{P_1 P_2} (\text{in km}) \quad d_{\text{Noordzee}} < 7.5 \text{ km} .$$

De afstand  $d_{\text{België}}$  is de kleinste afstand tussen één van beide (of beide) geoïdeberekeningspunten en de Belgische grens. De afstand  $d_{\text{Noordzee}}$  is de kleinste afstand tussen de Noordzee en één van beide (of beide) geoïdeberekeningspunten.

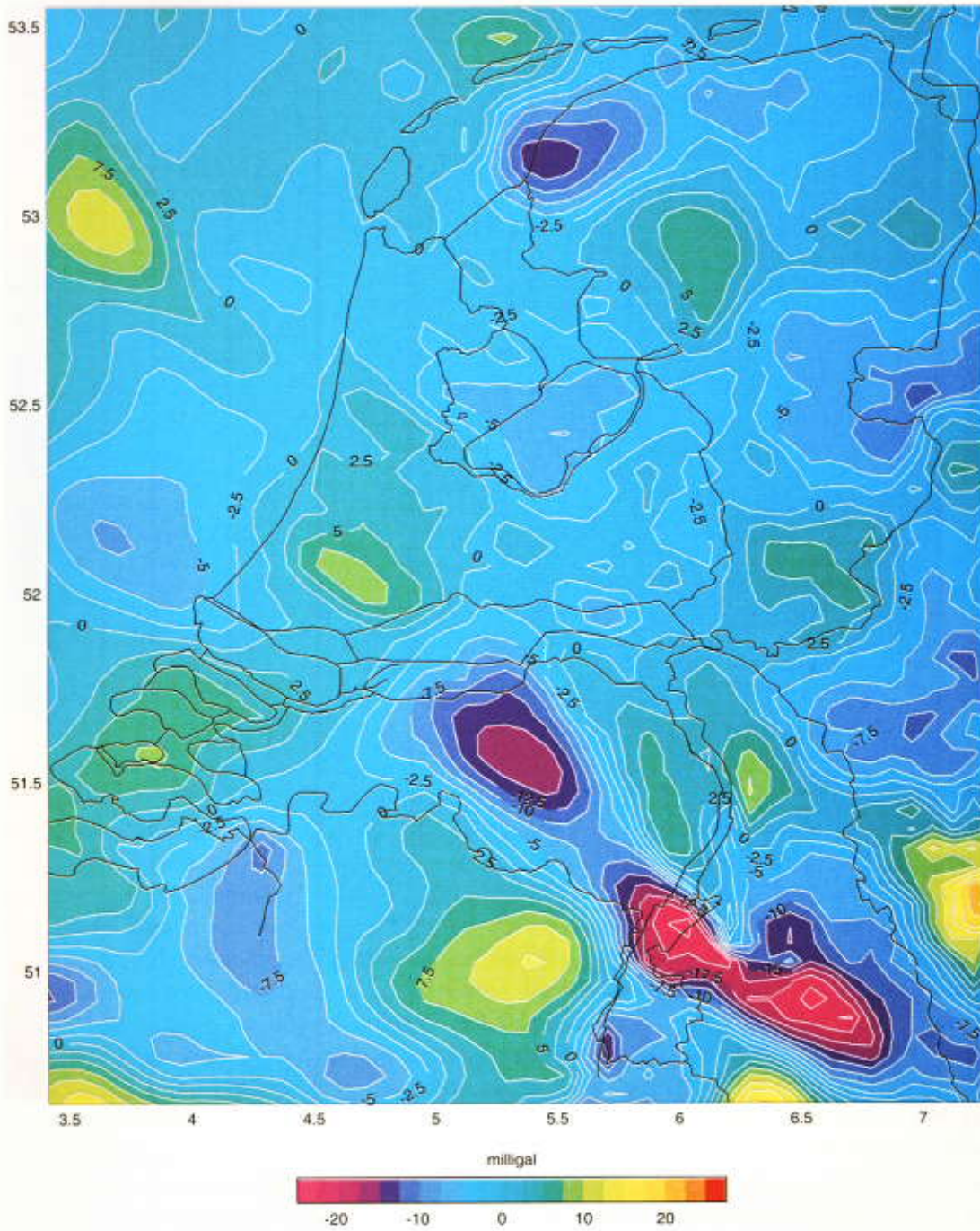


Figuur 8.3 Precisie van gravimetrische geoïdehoogteverschillen in Nederland. In cm.

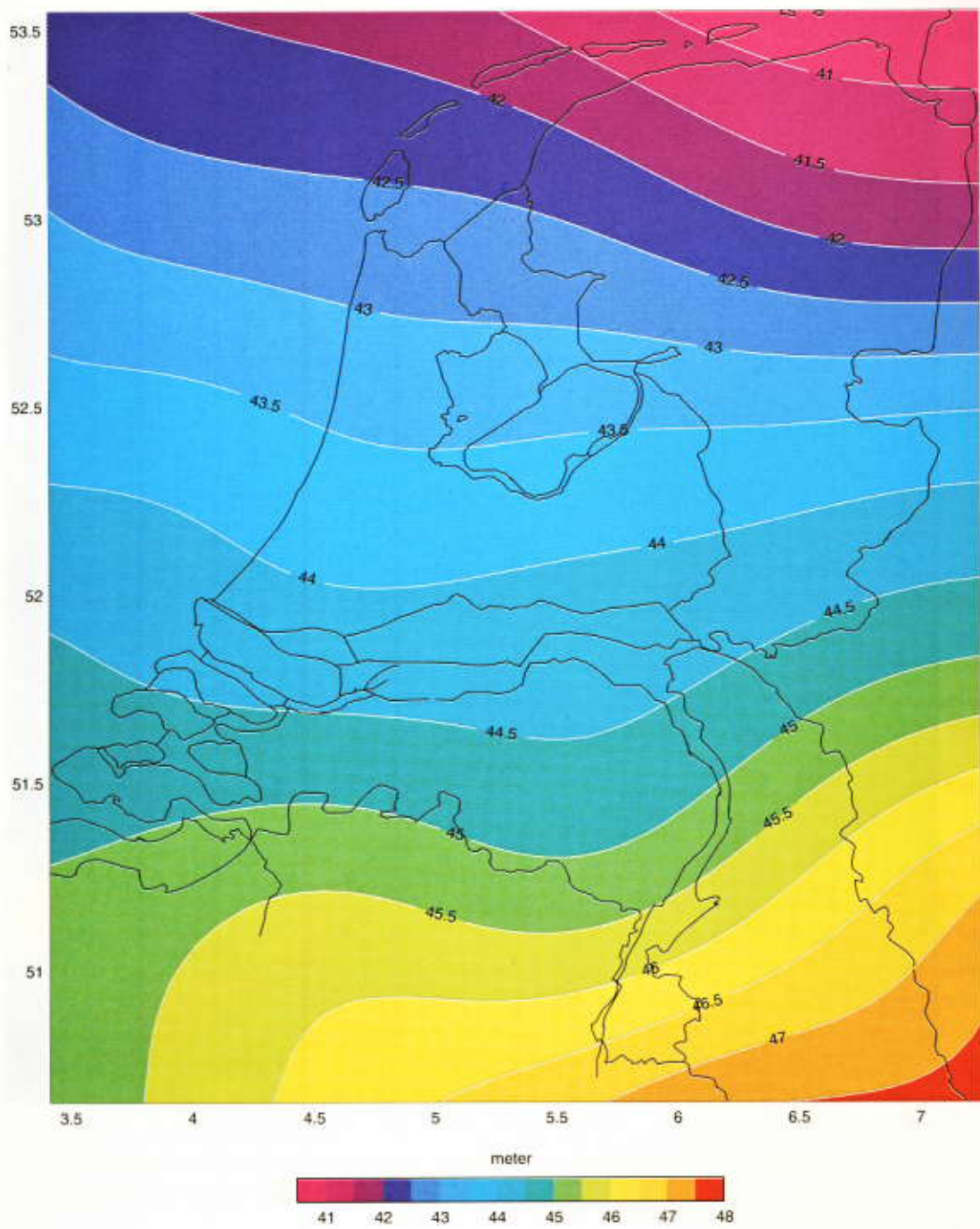


**Figuur 8.4** Zwaartekrachtanomalieën in Europa uit OSU91A ( $n = 2,360$ ). In mgal, isolijneninterval is 10 mgal.



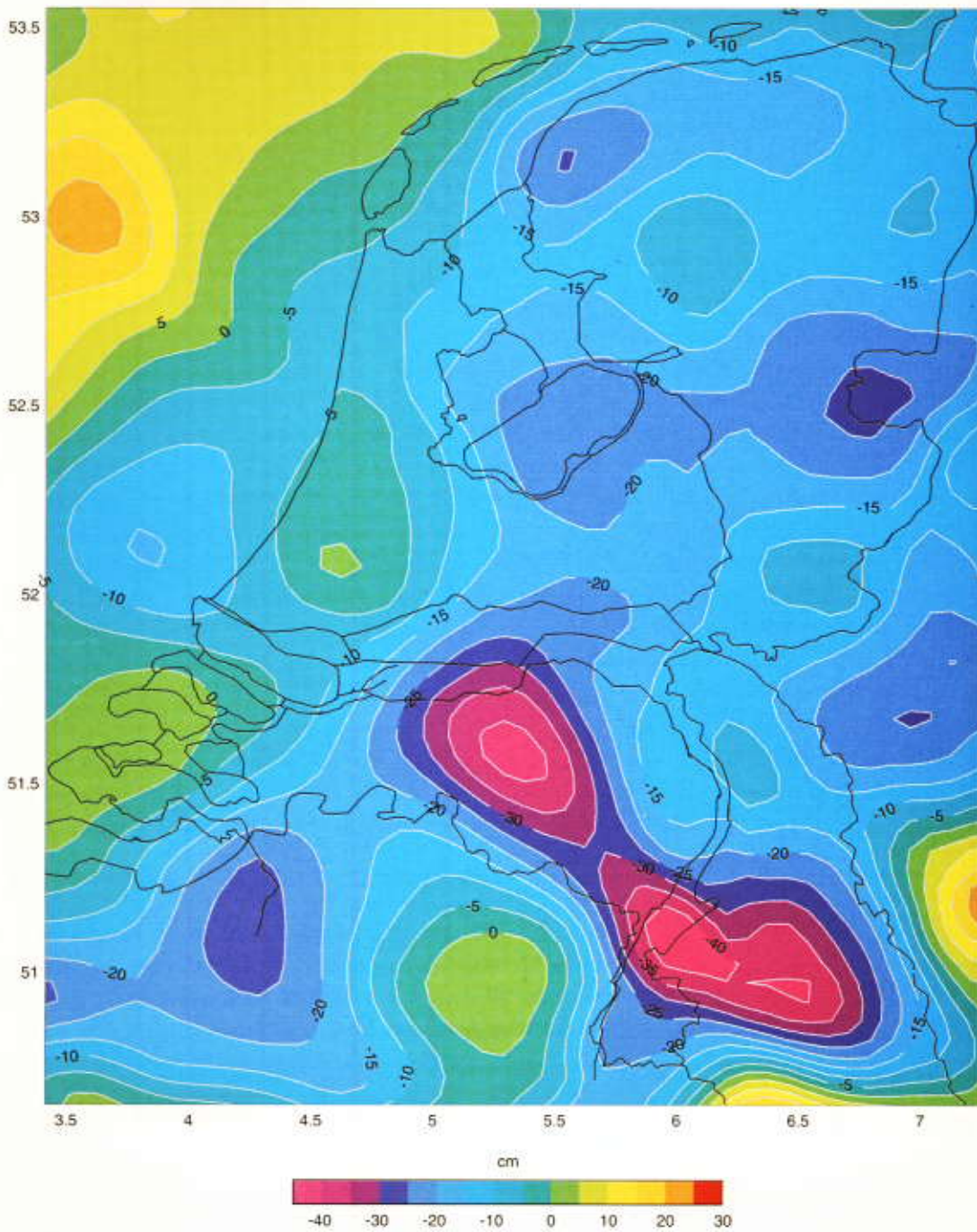


**Figuur 8.5** Residu zwaartekrachtanomalieën in een deel van Europa na aftrek van de OSU91A-zwaartekrachtanomalieën. In mgal, isolijneninterval is 2.5 mgal.



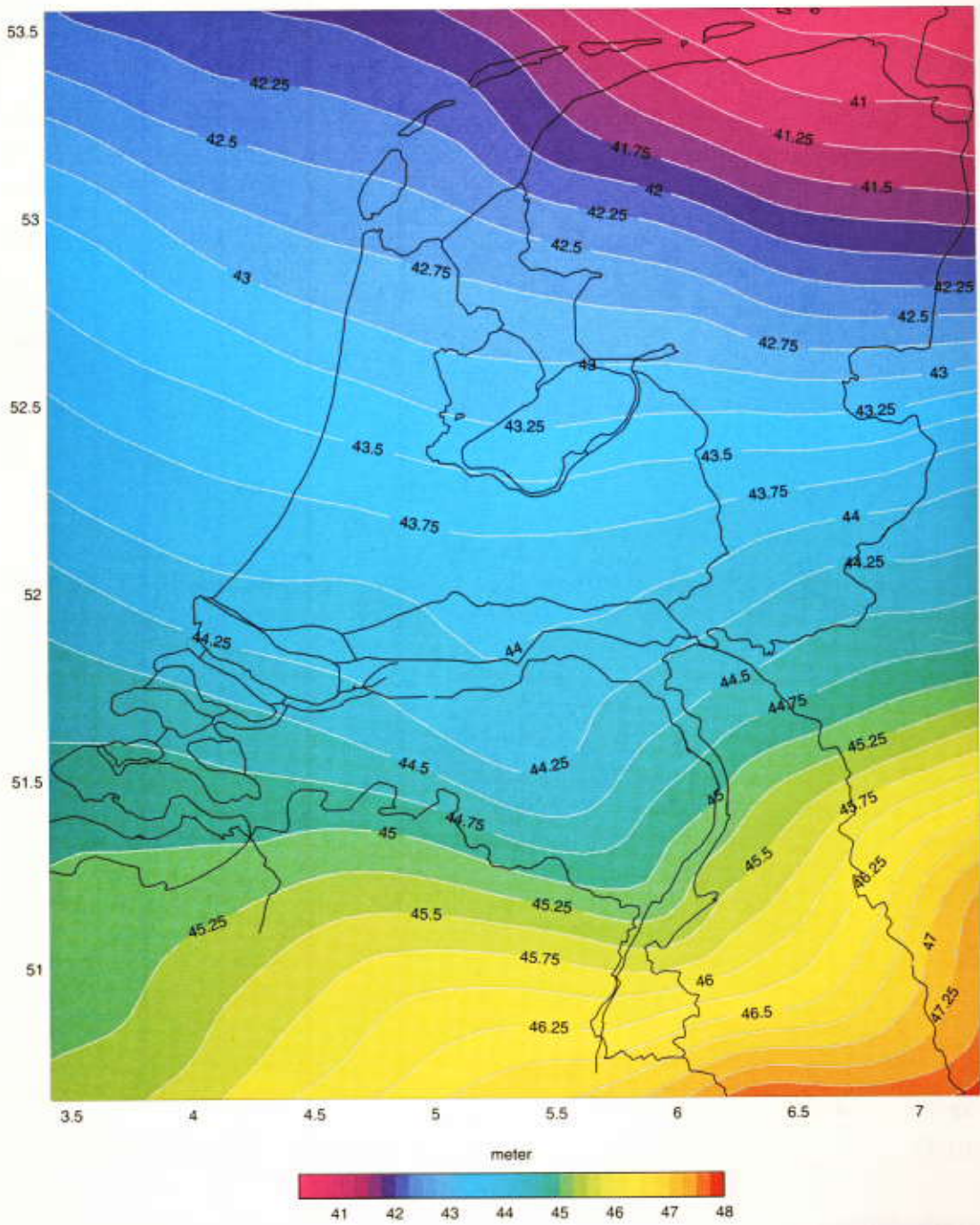
**Figuur 8.6** Geoidbijdrage van OSU91A, gehele effect. In m, isolijneninterval is 0.5 m.





**Figuur 8.7** Geöidebijdrage van de residu zwaartekrachtanomalieën, met een binnengebiedgrootte van  $5^\circ$ . In cm, isolijneninterval is 2.5 cm.





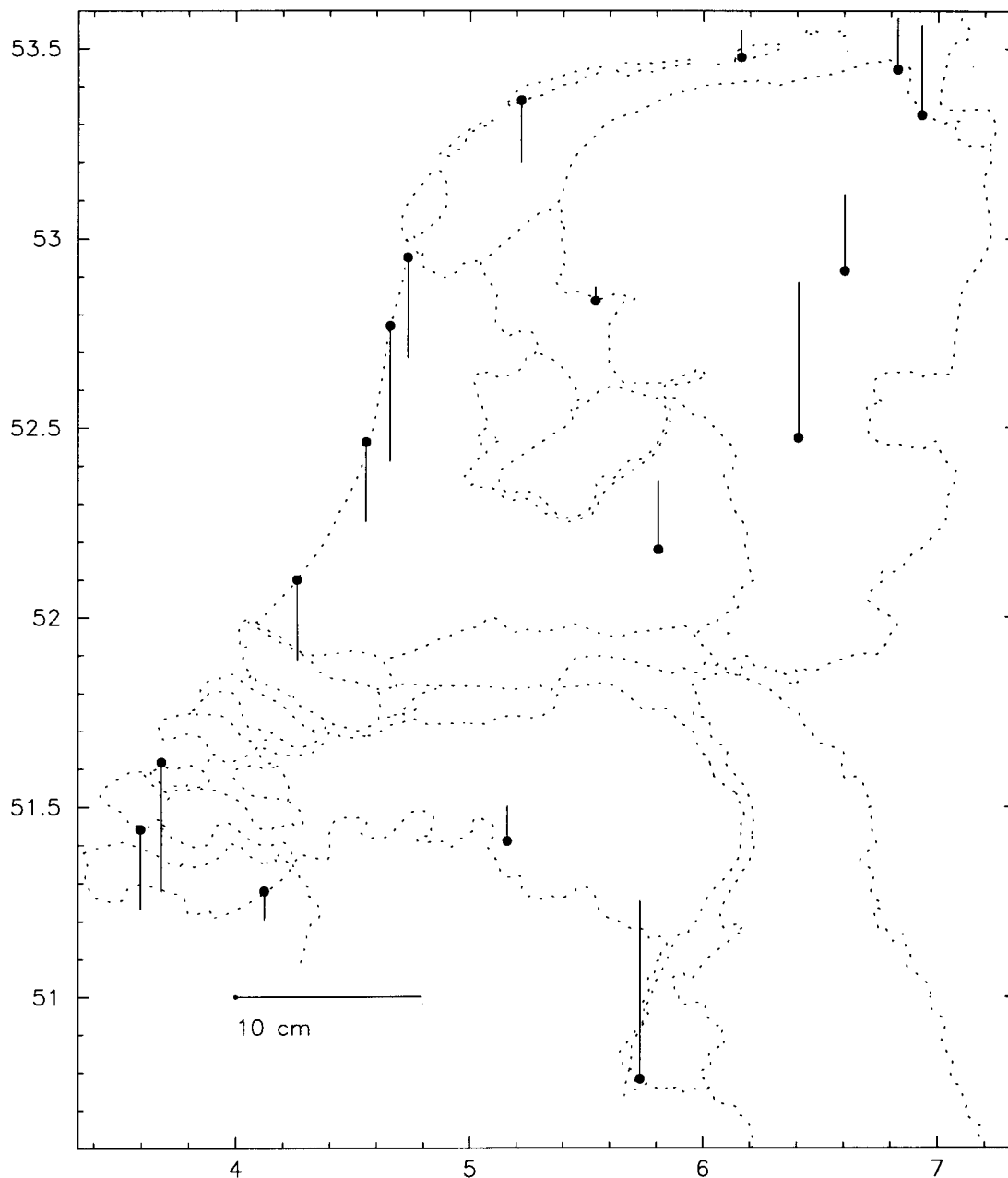
**Figuur 8.8** Gravimetrische geoiden voor Nederland ten opzichte van GRS80. In m, isoliijneninterval 0.25 m.

### 8.3 Geoïde, waterpassen en GPS

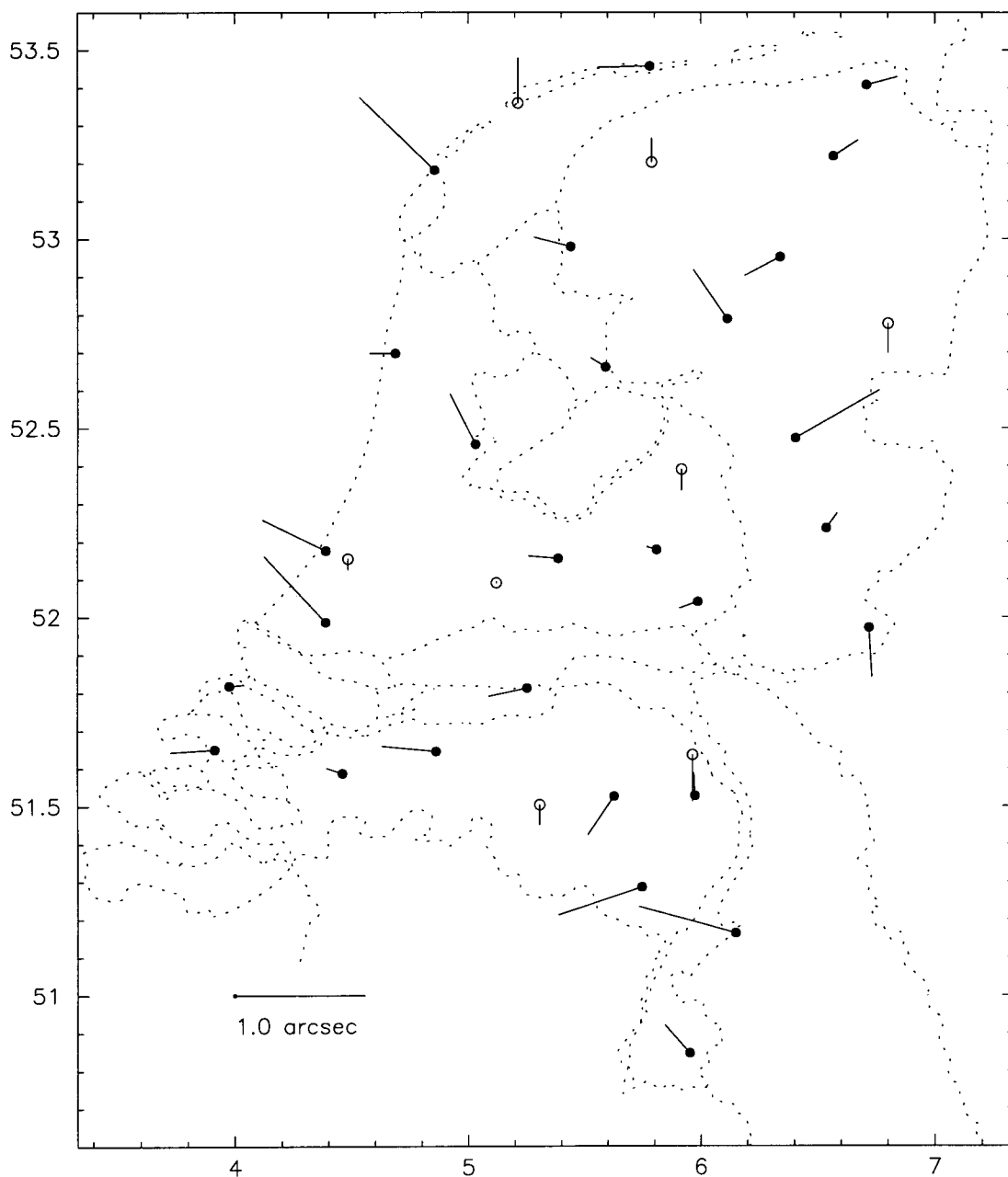
Als GPS-metingen zijn gedaan levert dat ellipsoïdische hoogteverschillen op. Deze hoogteverschillen zijn doorgaans bepaald ten opzichte van WGS84 of ETRS89. We zullen hier geen onderscheid maken tussen deze beide referentiesystemen. Door nu van deze ellipsoïdische hoogteverschillen de waterpashoogteverschillen af te trekken, verkrijgt men geoïdehoogteverschillen, zie figuur 1.2. Dit is gedaan met de resultaten van de NEREF-Mareo-campagne uit 1994. De precisie van de geoïdehoogteverschillen uit GPS en waterpassen wordt geschat op 2-3 cm binnen heel Nederland. Voor alle punten waar GPS en waterpashoogten bekend zijn, zijn de verschillen met de gravimetrische geoïde uit figuur 8.8 berekend, en weergegeven middels streepjes in figuur 8.9. Het gemiddelde verschil is -0.508 m, met een rms van 0.049 m.

### 8.4 Geoïde en schietloodafwijkingen

Schietloodafwijkingen geven aan wat de helling van de geoïde is in een punt, zie (5.1) en (5.2). Voor alle punten in Nederland waar schietloodafwijkingen zijn gegeven in Nederland, zie figuur 5.2, zijn de hellingen van de gravimetrische geoïde in noord-richting en in oost-richting bepaald. Dit is gedaan met Overhauser-splines (Klees, 1992; zie bijlage C). De verschillen tussen de gemeten schietloodafwijkingen en de berekende schietloodafwijkingen uit de gravimetrische geoïde, zijn weergegeven in figuur 8.10. De statistieken van deze verschillen staan gegeven in tabel 6.7.



**Figuur 8.9** *Verschillen tussen GPS/waterpas-geoidhoogten en gravimetrische geoidhoogten. De zwarte punten geven de positie van de meetpunten weer. De lengte van de streepjes geeft de amplitude aan, en de richting het teken van het verschil. De gemiddelde waarde van ongeveer 50 cm is weggelaten. Linksonder wordt de lengteschaal aangegeven.*



**Figuur 8.10** Verschillen tussen de gemeten schietloodafwijkingen uit figuur 5.2 en de berekende schietloodafwijkingen uit de gravimetrische geoïde uit figuur 8.8. De punten die met zwarte puntjes zijn weergegeven hebben zowel een breedte- als lengte-component. De open rondjes hebben alleen een gemeten astronomische breedte. De grootte van de streepjes geeft de amplitude van het verschil aan, en de richting de richting. Linksonder wordt de lengteschaal aangegeven.

## 8.5 Bepaling van de met GPS/waterpassen en schietloodafwijkingen verbeterde geoïde

Uit de vergelijking van de gravimetrische geoïdehoogteverschillen en de GPS/waterpas-geoïdehoogteverschillen en de schietloodafwijkingen blijken nog verschillen te resteren van ongeveer 10 cm. De verschillen hebben een langgolvig karakter over heel Nederland. De verschillen passen binnen de precisie van de verschillen, zoals die volgen uit figuur 8.3 voor de gravimetrische geoïdehoogteverschillen, en de 2-3 cm maat voor de GPS/waterpas-geoïdehoogteverschillen. Omdat de ruis in de gravimetrische geoïde met name voorkomt op de grote golflengten (langer dan 100-200 km), kan deze fout worden gecorrigeerd door de GPS/waterpas-verschillen die een precisie van 2-3 cm hebben over 100-200 km. In paragraaf 6.4 is getoond dat de langgolvige fout in de geoïde ten gevolge van de ruis in het geopotentialmodel een zeer vlak karakter heeft in een gebied van 200 km. Deze fout kan worden beschreven middels het eenvoudige model

$$\delta N(\varphi, \lambda) = a + b(\lambda - 5.0) + c(\varphi - 52.0), \quad (8.5)$$

waarin  $\varphi$  en  $\lambda$  in WGS84/ETRS89 zijn genomen. Dit correctievlak heeft 3 onbekende parameters. Er zijn 17 punten gegeven waarvoor de geoïdehoogteverschillen uit GPS/waterpassen en de gravimetrische geoïde  $\delta N(P)$  zijn gegeven.

De schietloodafwijkingen geven vergelijkbare informatie. Ze zeggen niets over de absolute waarde van de geoïde, maar wel iets over de helling ervan. Er geldt dan met (5.1) en (5.2)

$$\delta \xi = \frac{-b}{R}, \quad (8.6)$$

$$\delta \eta = \frac{-c}{R \cos \varphi}. \quad (8.7)$$

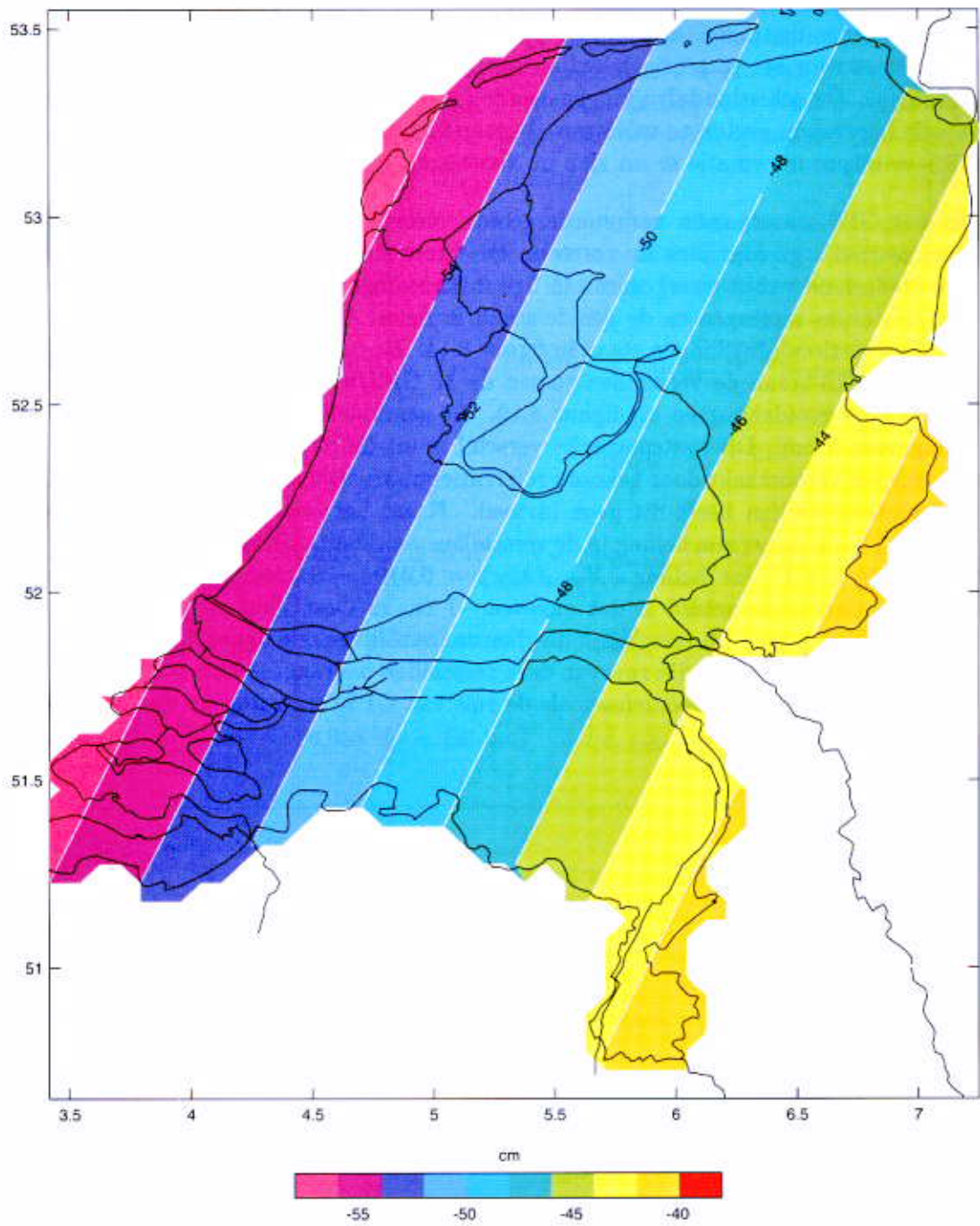
De 36 paren van schietloodafwijkingen  $\xi$  en  $\eta$  leveren dus ook nog eens 36 extra voorwaarden bij de bepaling van de gewenste correctieparameters  $b$  en  $c$ . Parameter  $a$  is niet van belang voor de correctie van de geoïdehoogteverschillen. In een kleinste-kwadraten vereffening worden de drie parameters bepaald. Alvorens deze vereffening uit te voeren moet eerst worden bekeken wat de varianties van de metingen zijn. De verschillen uit GPS/waterpassen hebben een precisie van 2-3 cm / 100-200 km ( $2 \cdot 10^{-7}$ ). Alle GPS/waterpas-metingen hebben een gecorrigeerde meetruis. De volledige covariantiematrix van de GPS-waarnemingen die volgt uit de SCAN3-berekening is gebruikt. Voor de lokale geoïde- en waterpasruis is 5 mm genomen. Deze keuze heeft weinig invloed. De standaardafwijking van de schietloodafwijkingen wordt geschat op 0.2" (Husti, 1978). Dat betekent een geoïdehelling precisie van  $10 \cdot 10^{-7}$ . Deze metingen hebben een hoogfrequente/ongecorrigeerde ruis.

De parameters zijn bepaald met een kleinste-kwadraten vereffening waarbij toetsing op waarnemingen en statistisch model heeft plaats gevonden. Hierbij zijn de twee al eerder genoemde punten Hoek van Holland en Delft verwijderd. De uiteindelijke berekening levert een vlak op volgens

$$\delta N(\varphi, \lambda) = -0.5082 + 0.0529(\lambda - 5.0) - 0.0414(\varphi - 52.0). \quad (8.8)$$

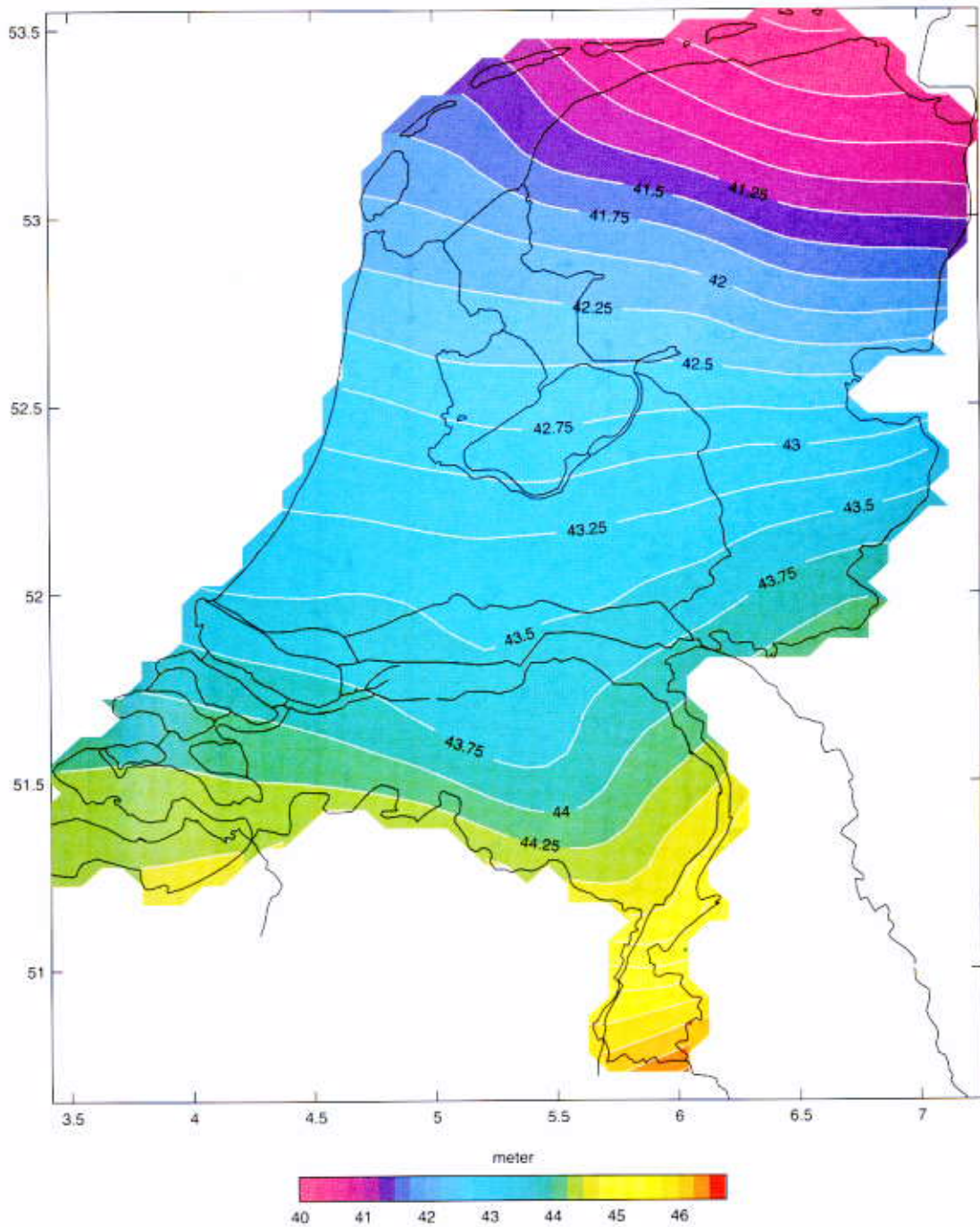
Doordat de ruis van de schietloodafwijkingen hoog is vergeleken met de kwaliteit van de GPS/waterpas-metingen, dragen ze vrijwel niets bij aan de berekening. De genoemde parameters voor het correctievlak zijn daarom berekend met alleen de GPS/waterpas-metingen. De schietloodafwijkingen worden alleen gebruikt om de hoge frequenties van de berekende geöïde te valideren. Figuur 8.11 laat zien hoe de correcties door de GPS/waterpas-informatie er uit zien in Nederland.

De met GPS/waterpassen verbeterde geöïde voor Nederland wordt berekend uit de gravimetrische geöïde, plus de correctie uit figuur 8.11. Deze best mogelijke geöïde voor Nederland wordt weergegeven in figuur 8.12. De resterende verschillen tussen de GPS/waterpas-metingen en de geöïde staan in figuur 8.13. De resterende verschillen met de schietloodafwijkingen staan in figuur 8.14. Zie ook de tabellen in paragraaf 6.6. In figuur 8.15 staan de verschillen tussen de 37 GPS/waterpas-geöïdehoogten van de NAM en de geöïdehoogten uit figuur 8.12. De gemiddelde waarde van de verschillen is ongeveer 5 cm. Dit systematische verschil is uit de plot weggelaten. Dit verschil kan worden veroorzaakt door gekozen referentiepunten voor GPS of waterpassen. Voor de hoogteverschillen heeft dit geen invloed. Naast het constante verschil blijkt uit figuur 8.15 ook dat er een helling in de verschillen voorkomt. Uit een kleinste-kwadraten vereffening blijkt deze helling  $\delta N_{\text{NAM}}(\lambda, \varphi) = 0.010\lambda - 0.024\varphi$  (in m) te bedragen. Voor het Groningse gebied is dat ongeveer -1 cm in Oost-West richting en 1 cm in Noord-Zuid richting. De verschillen die daarna overblijven, zie figuur 8.16, hebben geen systematisch effect meer. De rms van deze verschillen bedraagt slechts 4 mm! Hierin zit zowel de hoogfrequente geöïdefout, als de ruis van GPS- en waterpas-metingen, welke op 0.5-1.0 cm werd geschat.



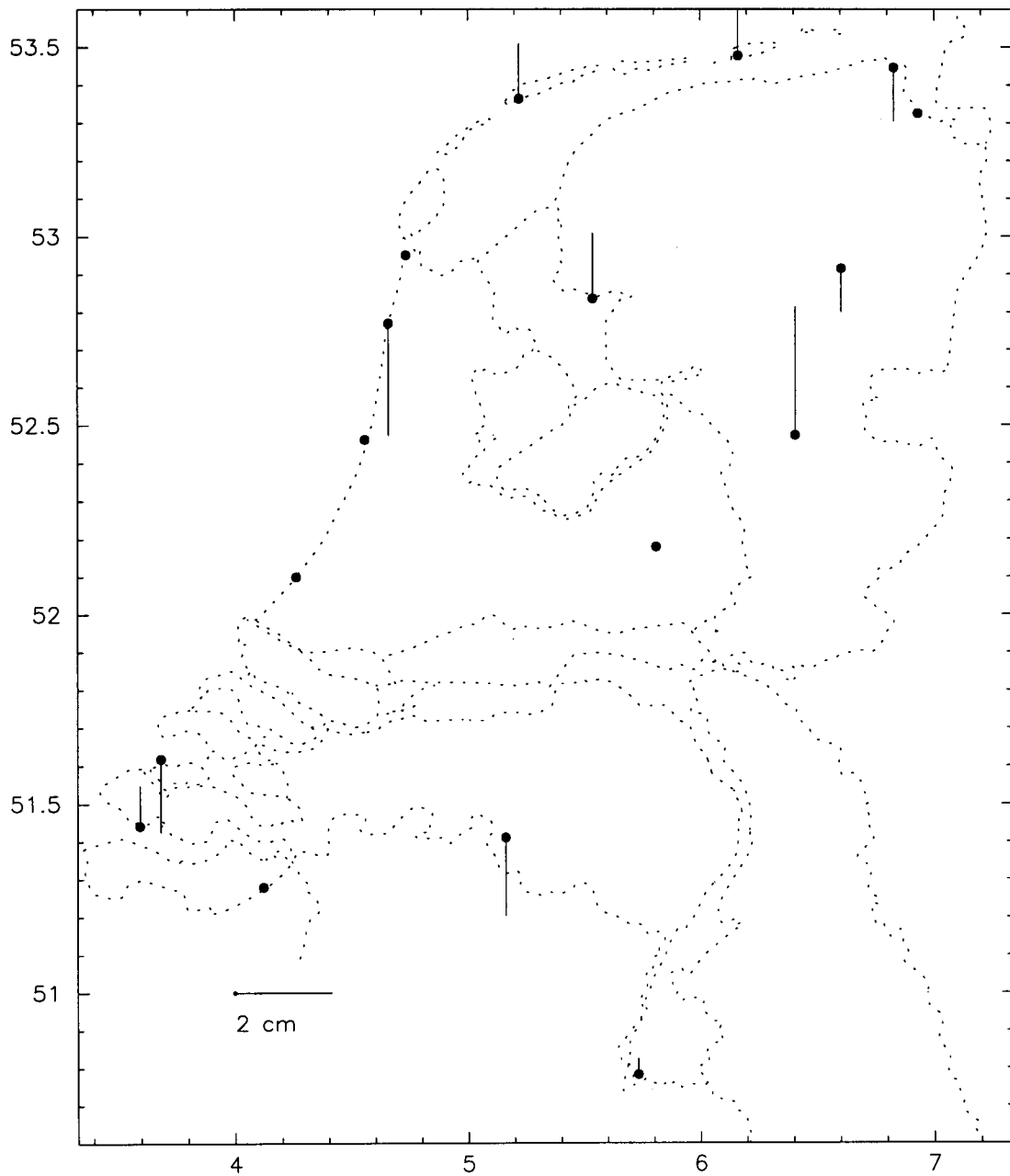
**Figuur 8.11** Correcties aan de gravimetrische geöïde op basis van de verschillen met GPS/waterpas-resultaten. In cm, isolijneninterval is 2 cm.



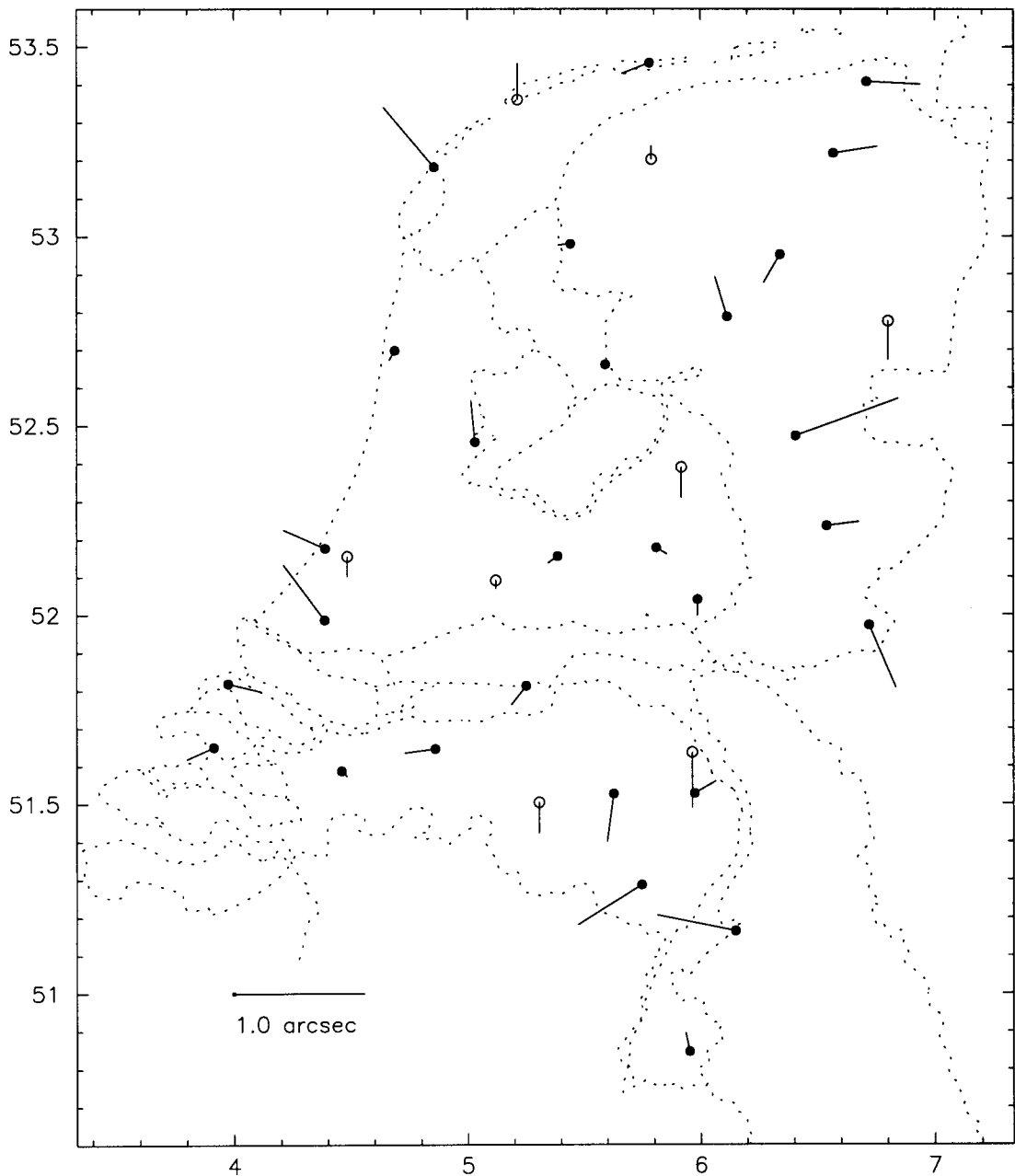


**Figuur 8.12** Geoid voor Nederland uit gravimetrische geoid plus vlakcorrectie op basis van de verschillen met GPS/waterpas-resultaten. In m, isolijneninterval is 0.25 m.

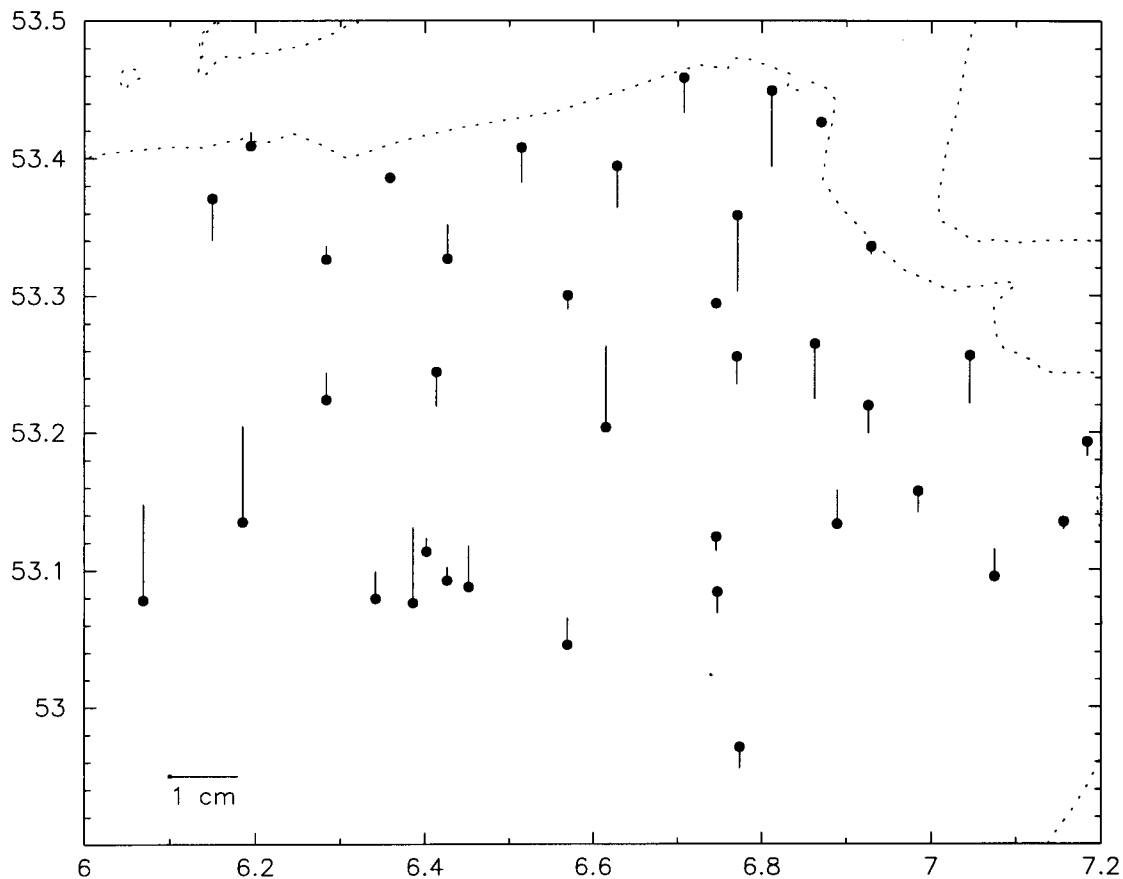




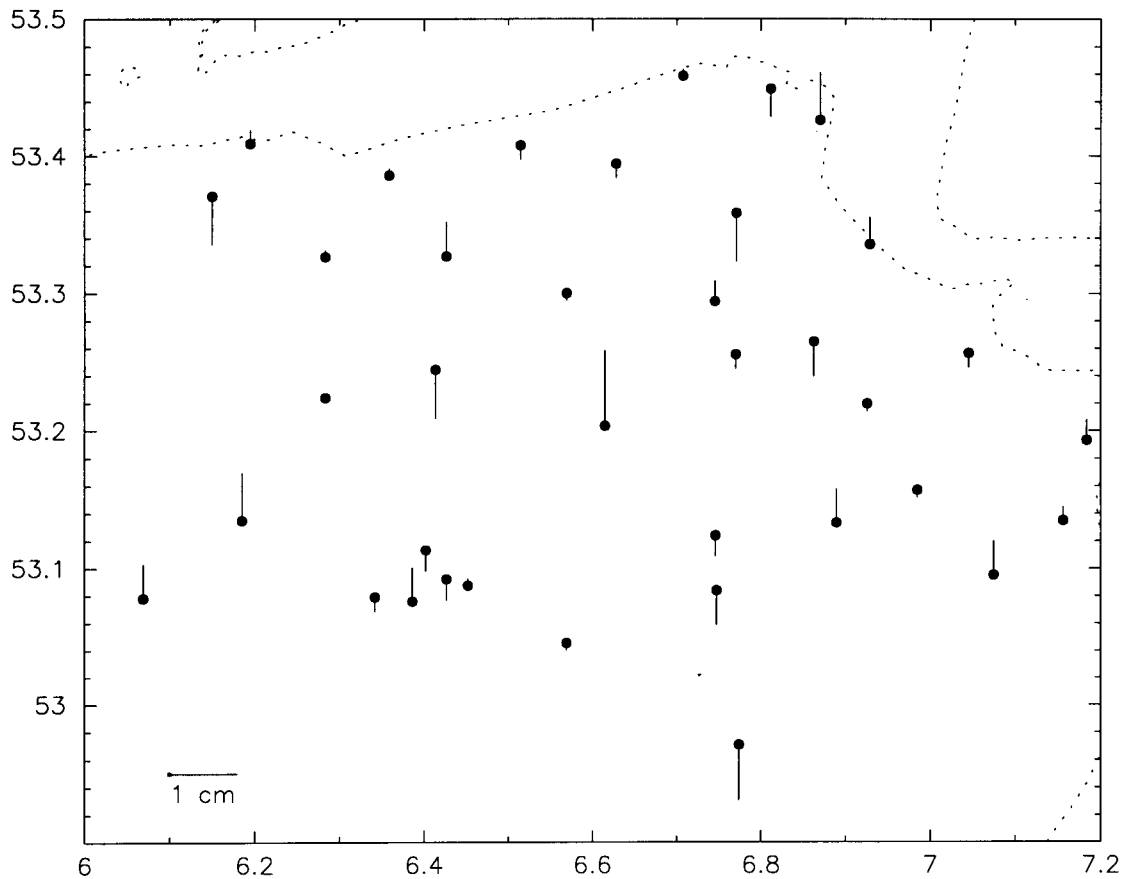
**Figuur 8.13** *Verschillen tussen GPS/waterpas-geöïdehoogten en verbeterde geöïdehoogten uit figuur 8.12. De zwarte punten geven de positie van de meetpunten weer. De lengte van de streepjes geeft de amplitude aan, en de richting het teken van het verschil. Linksonder wordt de lengteschaal aangegeven.*



**Figuur 8.14** Verschillen tussen de gemeten schietloodafwijkingen uit figuur 5.2 en de berekende schietloodafwijkingen uit de gravimetrische geoïde uit figuur 8.12. De punten die met zwarte puntjes zijn weergegeven hebben zowel een breedte- als lengte-component. De open rondjes hebben alleen een gemeten astronomische breedte. De grootte van de streepjes geeft de amplitude van het verschil aan, en de richting de richting.



**Figuur 8.15** *Verschillen tussen GPS/waterpas-geoidhoogten van de NAM in Groningen en de verbeterde geoidhoogten uit figuur 8.12. De zwarte punten geven de positie van de meetpunten weer. De lengte van de streepjes geeft de amplitude aan, en de richting het teken van het verschil. Het gemiddelde verschil is 0.050 m wat is verwijderd. De rms van de verschillen is 6 mm.*



**Figuur 8.16** Verschillen tussen GPS/waterpas-geoidhoogten van de NAM in Groningen en de verbeterde geoidhoogten uit figuur 8.12 na aanbrengen van een extra lokaal correctievlak. De zwarte punten geven de positie van de meetpunten weer. De lengte van de streepjes geeft de amplitude aan, en de richting het teken van het verschil. Het gemiddelde verschil is 0 mm. De rms van de verschillen is 4 mm.

De fout in de met GPS/waterpassen en schietloodafwijkingen gecorrigeerde geoïde voor Nederland bestaat uit de discretisatiefout, de hoogfrequente ruis door de binnengebied-data, en een langgolvlige fout voor golflengten groter dan 100 km van 2-3 cm. De precisiemaat voor de met GPS/waterpassen verbeterde geoïde voor Nederland wordt weergegeven in figuur 8.17. Een formule die de precisie beschrijft wordt gegeven door

$$\sigma_{\Delta N}^2 \text{ (cm}^2\text{)} = (0.3)^2 + (0.02)^2 \cdot d_{P_1 P_2}^2 \text{ (in km)} . \quad (8.9)$$

$d_{P_1 P_2}$  is de afstand tussen de twee geoïdeberekeningspunten. Als één of beide geoïdeberekeningspunten dicht in de buurt van België of de Noordzee liggen dan komt er nog een foutbijdrage van deze binnengebieddata bij. De totale fout wordt dan beschreven door

$$\sigma_{\Delta N}^2 \text{ (cm}^2\text{)} = (0.3)^2 + (0.02)^2 \cdot d_{P_1 P_2}^2 \text{ (in km)} + \sigma_{\text{België}}^2 + \sigma_{\text{Noordzee}}^2 , \quad (8.10)$$

met

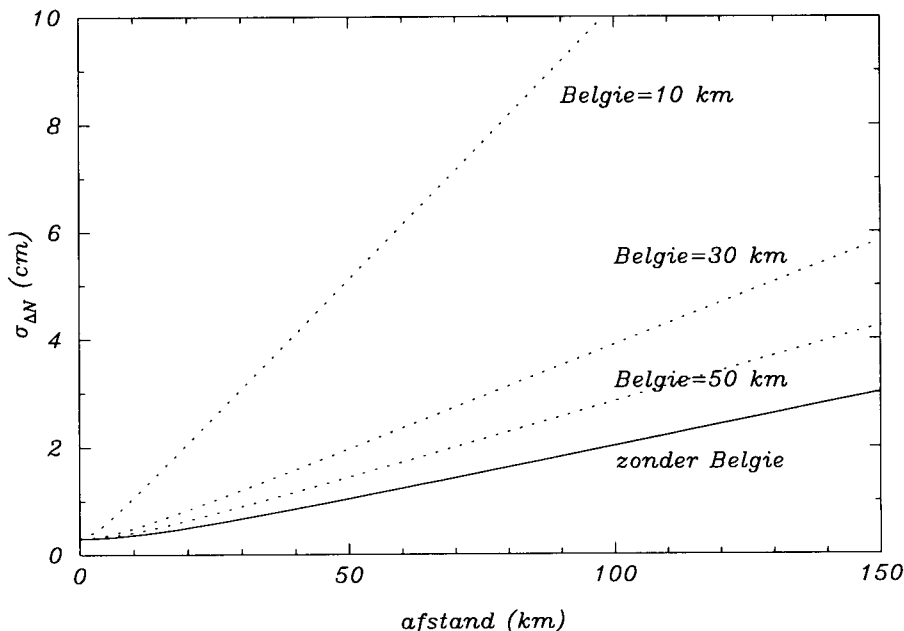
$$\sigma_{\text{België}} \text{ (in cm)} = 1.0 \frac{d_{P_1 P_2}}{d_{\text{België}}} \quad d_{\text{België}} > 10 \text{ km} \quad (8.11)$$

$$\sigma_{\text{België}} \text{ (in cm)} = 0.10 d_{P_1 P_2} \text{ (in km)} \quad d_{\text{België}} < 10 \text{ km} .$$

en

$$\sigma_{\text{Noordzee}} \text{ (in cm)} = 0.25 \frac{d_{P_1 P_2}}{d_{\text{Noordzee}}} \quad 7.5 \text{ km} < d_{\text{Noordzee}} < 30 \text{ km} \quad (8.12)$$

$$\sigma_{\text{Noordzee}} \text{ (in cm)} = 0.035 d_{P_1 P_2} \text{ (in km)} \quad d_{\text{Noordzee}} < 7.5 \text{ km} .$$



**Figuur 8.17** *Precisie van met GPS/waterpassen verbeterde geoïdehoogteverschillen in Nederland. In cm. Voor verschillende afstanden tot België (10, 30 en 50 km) is ook de totale fout gegeven.*

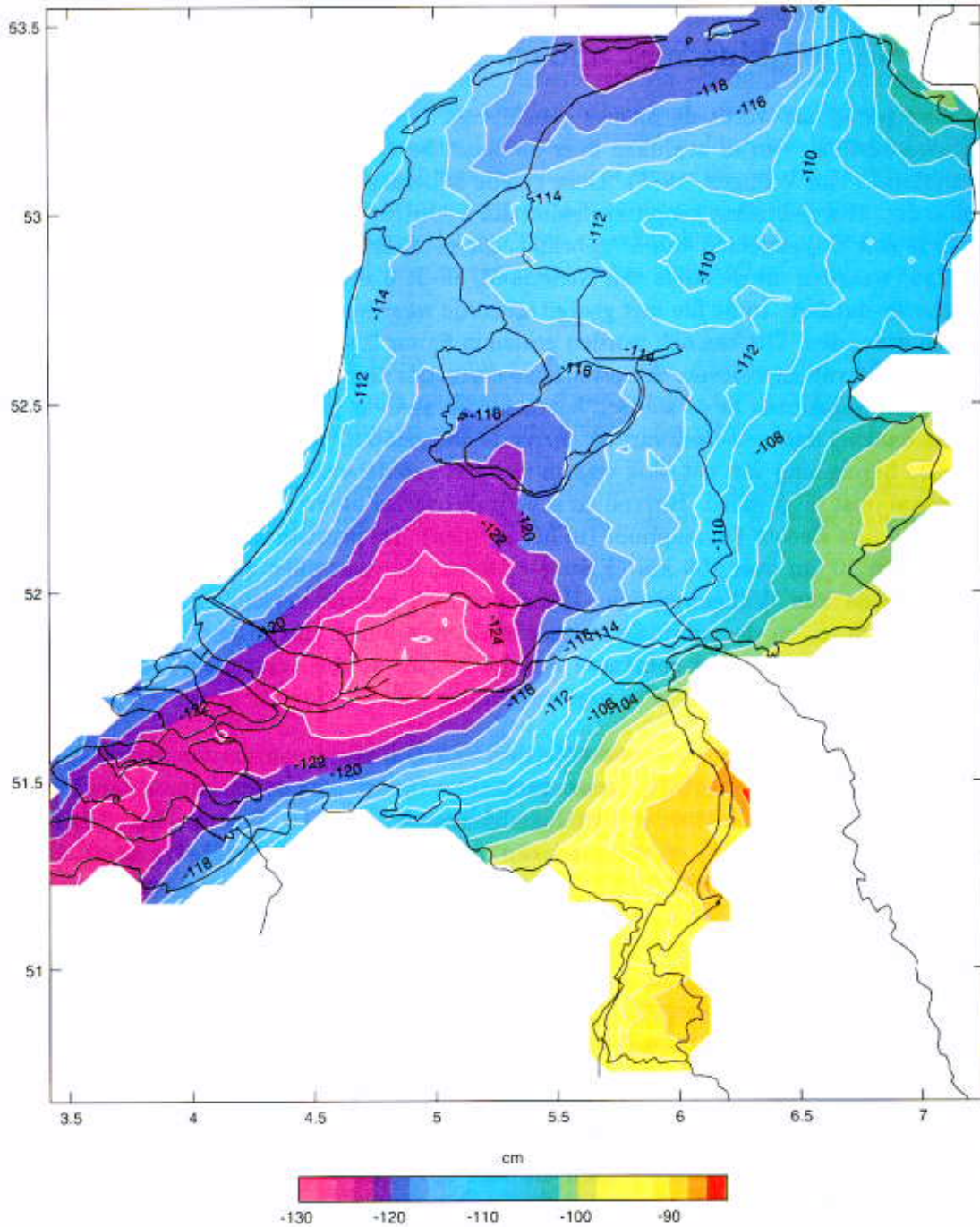
De afstand  $d_{\text{België}}$  is de kleinste afstand tussen één van beide (of beide) geoiderekeningspunten en de Belgische grens. De afstand  $d_{\text{Noordzee}}$  is de kleinste afstand tussen de Noordzee en één van beide (of beide) geoiderekeningspunten. Voor verschillende afstanden tot aan de Belgische grens is de geoidfout weergegeven in figuur 8.17.

## 8.6 Vergelijking met andere geoides

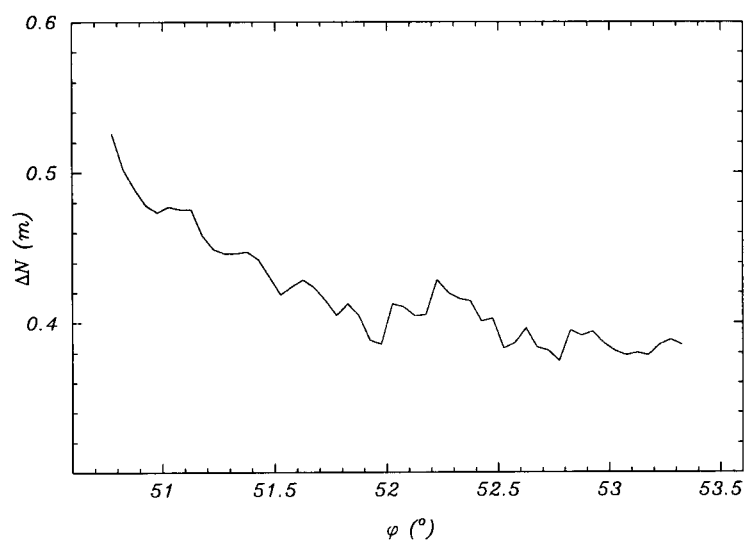
In deze paragraaf wordt de nieuwe geoid voor Nederland vergeleken met bestaande geoidmodellen. Om te beginnen is er de laatst berekende gravimetrische geoid voor Nederland (Van Willigen, 1985). Deze geoid is berekend met een gewone combinatieoplossing. Het gebruikte geopotentialmodel is OSU81 (tot en met graad en orde 180) en er is een binnengebied van  $5^\circ$  gebruikt. De gebruikte data in het binnengebied zijn de  $3' \times 5'$  waarden uit de Atlas van Nederland, en de  $6' \times 10'$  gemiddelde waarden van de Hannover-dataset. In de file met gedigitaliseerde waarden uit de Atlas-kaart zijn enkele fouten gevonden. Dit kan ook worden gezien in figuur 2.3.4, (Van Willigen, 1985, p.82), ten noorden van Eindhoven. Ellipsoidische correcties zijn niet apart aangebracht omdat die waren opgesloten in de sferisch harmonische analyse programmatuur. Waarschijnlijk is daarbij dan een deel van de correctie weggelaten, zoals uitgelegd in paragraaf 7.4. De berekening van het blok waarin zich het geoiderekeningspunt bevindt is niet helemaal juist uitgevoerd. Bovendien is voor de overige blokwaarden het Stokes gewicht berekend met slechts 1 knooppunt (in het midden). De precisie van het resultaat wordt geschat op 10 cm over 100 km. Figuur 8.18 laat de verschillen zien tussen de nieuwe geoid en de Van Willigen-geoid. Het gemiddelde van de verschillen is  $-1.119$  m, de rms is 0.090 m, en de minimale en maximale verschillen zijn respectievelijk  $-1.28$  en  $-0.85$  m. Afgezien van het constante verschil vinden we dus verschillen tot enkele dm, met een rms van 9 cm. Dit is in overeenstemming met de precisiematen.

Denker (1989) heeft voor het westelijk deel van Duitsland een gravimetrische geoid berekend. Hij heeft daarbij gebruik gemaakt van het geopotentialmodel IFE88E1 ( $N_{\text{max}} = 360$ ) (Basič, 1989), en variabele blokgrootten in het binnengebied. Hij heeft altijd alle data gebruikt, en niet met een vast integratiebinnengebied gewerkt. Als berekeningsmethode voor het binnengebied is plattevlak-FFT toegepast, wat een Stokes sommatie over blokken inhoudt, maar met enkele benaderingen in de Stokes formule. (Haagmans e.a., 1993) hebben laten zien dat dit langgolvlige fouten met een amplitude van enkele dm kan geven. Voor het grensgebied van Nederland en Duitsland kan de geoid van Denker worden gebruikt voor een vergelijking met de nieuwe Nederlandse geoid. Figuur 8.19 laat deze verschillen zien. De verschillen zijn daarin weergegeven als functie van de breedte  $\varphi$  langs de Nederlands-Duitse grens. Voor 203 punten in een  $3' \times 5'$  grid zien we een gemiddeld verschil van 0.421 m. De rms van de verschillen is 0.041 m en de maxima zijn 0.355 en 0.541 m. Uit figuur 8.19 blijkt duidelijk een helling verschil. Als we de correctie uit GPS/waterpassen uit onze oplossing weglaten, zie (8.8), dan blijkt de helling vrijwel te verdwijnen en een verschil van ongeveer 80 cm over te blijven. Dit verschil wordt grotendeels veroorzaakt door de verschillende kernfuncties die zijn toegepast, respectievelijk Meissl/Wong&Gore  $L = 32$  en Molodenskii. De resterende verschillen bedragen enkele cm. Dit zijn effecten van de FFT-berekening, verschillen in

de berekeningsmethoden (kernfunctie en numerieke integratie) en dataverschillen. De oude data in Nederland zijn nog gebruikt door Denker. We mogen aannemen dat met de nieuwe data en de verbeterde berekeningsmethode die we nu hebben toegepast een beter resultaat wordt verkregen.



**Figuur 8.18** Verschillen tussen de nieuwe geoiden voor Nederland en de oude geoiden voor Nederland (Van Willigen, 1985). In cm, isolijneninterval is 2 cm.



**Figuur 8.19** Verschillen tussen de nieuwe geoides voor Nederland en de geoides van Duitsland (Denker, 1989). In m.



## 8.7 Geoïde in andere referentiestelsels

Het geoïderesultaat dat tot nu toe is berekend is gegeven ten opzichte van het referentiesysteem WGS84/GRS80/ETRS89, welke voor praktische toepassingen niet hoeven worden onderscheiden. Voor sommige toepassingen is het gewenst de geoïde te hebben ten opzichte van een ander referentiesysteem. Als de transformatieparameters tussen het gewenste referentiesysteem en WGS84 bekend zijn, dan kunnen de geoïdehoogten worden getransformeerd naar het gewenste systeem. De transformatievergelijking is

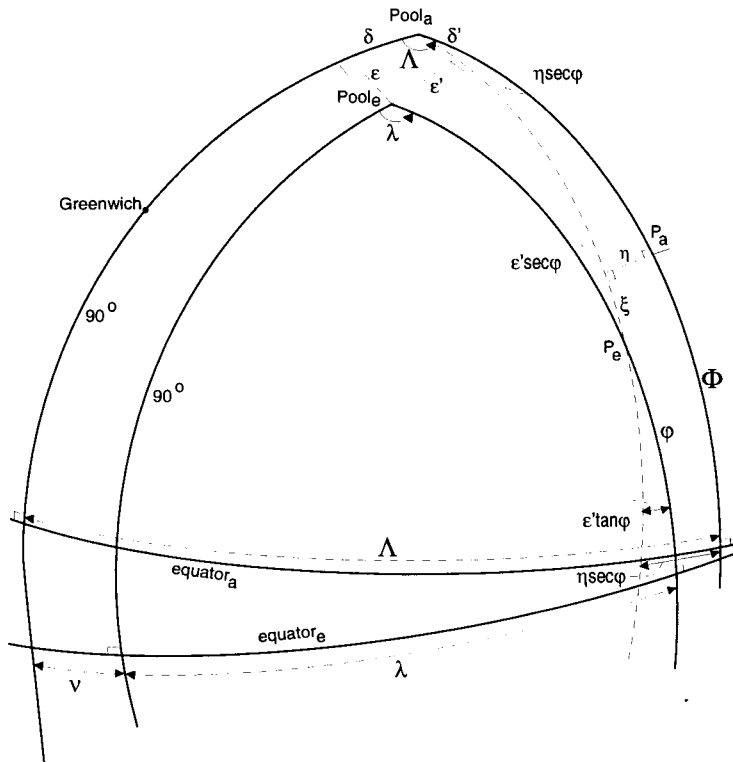
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta & \gamma & -\beta \\ -\gamma & \delta & \alpha \\ \beta & -\alpha & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}. \quad (8.13)$$

Hierin zijn  $x_2, y_2, z_2$  de nieuwe coördinaten,  $x_1, y_1, z_1$  de oude coördinaten en  $T_x, T_y, T_z, \alpha, \beta, \gamma$  en  $\delta$  de transformatieparameters. Het is gemakkelijker en beter om deze vergelijking te veranderen in

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{x_o} \\ T_{y_o} \\ T_{z_o} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta & \gamma & -\beta \\ -\gamma & \delta & \alpha \\ \beta & -\alpha & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_o \\ y_1 - y_o \\ z_1 - z_o \end{pmatrix}. \quad (8.14)$$

Hierin zijn  $x_o, y_o, z_o$  de coördinaten van een centraal gelegen punt in het gebied waarin men geïnteresseerd is en  $T_{x_o}, T_{y_o}$  en  $T_{z_o}$  de translatieparameters voor het centrale punt. Door het gebruik van het centrale punt als rotatiepunt zijn de translatieparameters en de rotatieparameters niet meer met elkaar gecorreleerd. Deze translatieparameters zijn dan veel minder gevoelig voor veranderingen in de rotatieparameters dan de oorspronkelijke in (8.13), zie (Strang van Hees, 1994). In Nederland worden de coördinaten van Amersfoort gebruikt voor het centrale punt. Deze zijn  $x_o = 3903453.148, y_o = 368135.313, z_o = 5012970.306$  in het Bessel-systeem en  $x_o = 3904046.180, y_o = 368161.314, z_o = 5013449.047$  in het ETRS-systeem.

Lokale referentie-ellipsoïdes worden gebruikt om daarop vereffeningen uit te voeren (Bakker e.a., 1985). Deze lokale ellipsoïdes worden zo gekozen dat ze zo goed mogelijk aansluiten bij de lokale geoïde, zodat zo klein mogelijke reducties van de waarnemingen op het aardoppervlak naar de ellipsoïde nodig zijn en de schietloodafwijkingen, die de richting van de reducties bepalen, ook zo klein mogelijk zijn. Het realiseren van de optimale aansluiting tussen de geoïde en de lokale ellipsoïde kan op verschillende manieren gebeuren. Hier wordt zodirect verder op ingegaan. De keuze van een lokale ellipsoïde bestaat enerzijds uit de vorm van de ellipsoïde, en anderzijds uit de ligging (positie en orientatie) ervan. In Nederland wordt de Bessel-ellipsoïde gebruikt. Deze heeft als vormparameters  $a = 6377397.155$  m en  $f = 1/299.1528128$ . De veel gebruikte mondiale ellipsoïde WGS84 heeft als vormparameters  $a = 6378137$  en  $f = 1/298.257223563$ . De ligging van een lokale ellipsoïde kan worden beschreven ten opzichte van het astronomisch stelsel, dat wordt bepaald door de gemiddelde pool-as en de Greenwich-meridiaan. Gemeten grootheden zoals de astronomische coördinaten  $\Phi$  en  $\Lambda$ , en de orthometrische hoogten (NAP-hoogten)  $H$  kunnen worden beschouwd als grootheden in dit stelsel.



**Figuur 8.20** *Onderlinge ligging van het astronomische stelsel en een ellipsoïde. De index a duidt op astronomisch, de index e op ellipsoïdisch.  $\delta$  en  $\epsilon$  zijn de hoekjes tussen de ellipsoïdisch pool en de astronomische pool.  $P_a$  is het astronomische zenit van een punt op aarde.  $P_e$  is het ellipsoïdische zenit, dat is de loodlijn op de ellipsoïde. De astronomische nul-meridiaan valt niet samen met de ellipsoïdische meridiaan. De hoek tussen deze twee is  $\nu$ .*

Er dienen 6 parameters te worden gekozen, zodanig dat de positie (translatie ten opzichte van het astronomische stelsel) en de orientatie (rotatie ten opzichte van het astronomische stelsel) van de lokale ellipsoïde vastliggen. De ligging van een gekozen ellipsoïde ten opzichte van het astronomische stelsel, met de z-as gelijk aan de gemiddelde pool-as en de x-as snijdend met de Greenwich-meridiaan wordt in figuur 8.20 gegeven, welke is afgeleid uit (Strang van Hees, 1977). Omdat de hoekjes  $\delta, \epsilon$ , en de schietloodafwijkingen  $\xi$  en  $\eta$  klein zijn, kan worden geschreven

$$\delta' = \delta \cos \lambda + \epsilon \sin \lambda, \tag{8.15}$$

$$\epsilon' = \delta \sin \lambda - \epsilon \cos \lambda. \tag{8.16}$$

Dan wordt verkregen dat

$$\Phi - \varphi = \xi - \delta', \tag{8.17}$$

$$\Lambda - \lambda = \eta \sec \varphi + \nu - \epsilon' \tan \varphi, \tag{8.18}$$

$$\alpha_a - \alpha_e = \eta \tan \varphi - \epsilon' \sec \varphi, \tag{8.19}$$

(hierin is een zenit-hoek afhankelijke term weggelaten). Verder is er nog de vergelijking

$$H - h = -N, \quad (8.20)$$

met  $H$  de waterpashoogte,  $h$  de ellipsoïdische hoogte en  $N$  de geoïdehoogte. In deze 4 vergelijkingen komen 10 onbekenden voor ( $\varphi, \lambda, \alpha_e, h, \xi, \delta, \eta, \varepsilon, \nu$  en  $N$ ) en 4 waarnemingen ( $\Phi, \Lambda, \alpha_a$  en  $H$ ). Er zijn dus 6 onbekenden over die mogen worden gekozen, en welke overeenkomen met de drie translaties en de drie rotaties. In Nederland is de Bessel-ellipsoïde vastgelegd ten opzichte van het astronomische stelsel door de keuze van (Heuvelink, 1918):  $\varphi, \lambda$  en  $\alpha_e$  voor het RD-punt in Amersfoort (RD-X=155000, RD-Y=463000).  $N$  is gelijk aan nul genomen in Amersfoort. Vervolgens moet dan nog worden gekozen voor

- $\xi$  òf  $\delta$
- $\eta$  òf  $\varepsilon$  òf  $\nu$

ook voor het punt Amersfoort. Deze keuze voor Nederland wordt niet expliciet genoemd in (Heuvelink, 1918). Het wordt niet duidelijk of de schietloodafwijkingen in Amersfoort gelijk aan nul zijn gekozen, of dat ze volgen uit het gemiddelde van de 13 breedtebepalingen en de azimutmetingen en lengtebepaling in Leiden die ten grondslag liggen aan de coördinaatkeuze voor Amersfoort. De keuze hiervoor is ook niet zo belangrijk voor de RD-berekening omdat de rotaties alleen een effect op de hoogte ten opzichte van Bessel hebben, en niet op de RD-coördinaten, zoals dadelijk nog zal worden behandeld.

De rotaties die voorkomen tussen het astronomische stelsel en het lokale ellipsoïdische stelsel hebben een directe relatie met de rotaties tussen WGS84 en een lokaal ellipsoïdisch stelsel. Van WGS84 weten we, of nemen we aan, dat de assen evenwijdig zijn met de astronomische assen (gemiddelde pool-as en Greenwich-meridiaan). De rotatiehoeken om van WGS84 naar een lokaal stelsel (bijvoorbeeld Bessel) te gaan,  $\alpha, \beta$  en  $\gamma$  uit (8.14), komen precies overeen met  $-\varepsilon, \delta$  en  $\nu$  uit figuur 8.20.

Als de rotaties verwaarloosbaar klein worden verondersteld, dus  $\delta = \varepsilon = \nu \approx 0$ , dan wordt de ligging van de ellipsoïde bepaald door de keuze van de coördinaten van één punt (het datumpunt) en het azimut tussen twee punten. Dit kan eenvoudig worden vergeleken met een 2-dimensionaal platte-vlak netwerk, waar met deze 3 parameters het netwerk wordt vastgelegd (afgezien van de schaal). Als de drie genoemde hoekjes nu niet precies nul zijn, maar een kleine waarde hebben dan wordt de ellipsoïde een klein beetje geroeteerd om het datumpunt. Voor de vereffende coördinaten (van bijvoorbeeld RD) heeft dit geen significant effect. Voor de hoogte van een punt ten opzichte van de ellipsoïde maakt dit echter heel veel uit. Als voor de Bessel-ellipsoïde in Nederland een rotatie wordt aangebracht die een hoogte-effect van 10 m aan de grenzen heeft, dan heeft dat op RD-coördinaten binnen Nederland een maximaal effect van 0.5 mm. Bij de vereffening van het RD-netwerk begin deze eeuw (Heuvelink, 1918) zijn alleen maar de coördinaten van Amersfoort en de azimut tussen Amersfoort en Utrecht genoemd. De rotatiehoeken zijn niet expliciet genoemd. De keuze van de rotatiehoeken kan daarom nu alsnog gebeuren. De keuze van de rotatiehoekjes zal zo worden gedaan, dat de

Bessel-ellipsoïde zo goed mogelijk aansluit bij de geoïde (het NAP-vlak). Dit was ook vroeger al het doel. Het realiseren van de optimale aansluiting tussen de geoïde en de lokale ellipsoïde kan op verschillende manieren gebeuren, al naar gelang de metingen die ervoor beschikbaar zijn. De kwaliteit van de Bessel-realiseringsmethode is afhankelijk van de gekozen methode en de beschikbare metingen. Enkele mogelijke methoden voor de bepaling van een Bessel-realiseringsmethode zijn:

- Schietloodafwijkingen in Amersfoort gelijk aan nul.
- Schietloodafwijkingen in 13 punten gemiddeld nul in Nederland.
- Minimalisatie van een aantal GPS/*H* geoïdehoogten in Nederland.
- Minimalisatie van de geïntegreerde Bessel-geoïdehoogten in Nederland.

De kwaliteit van de aansluiting tussen de geoïde en de Bessel-ellipsoïde neemt toe met deze mogelijkheden. De derde mogelijkheid is gebruikt door Schut (1991). Hij had voor ongeveer 20 punten GPS- en waterpashoogten beschikbaar uit de NEREF91 campagne. Door de bepaling van transformatieparameters tussen WGS84 en Bessel is impliciet deze realisatie van Bessel uitgevoerd. Voor het bepalen van de transformatieparameters zijn de Bessel-geoïdehoogten gelijk aan nul gekozen. Bij deze vereffening krijgen de waarnemingen vrij grote correcties (met name in de hoogterichting), omdat de werkelijke Bessel-geoïdehoogten kunnen oplopen tot 0.5-1 meter. Zo worden echter wel de transformatieparameters verkregen die een zeer goed passende Bessel-ellipsoïde opleveren.

Als we kiezen voor deze Bessel-realiseringsmethode kunnen ook de transformatieparameters van Schut worden gebruikt. De transformatie van de WGS84-geoïde naar Bessel kan dan worden uitgevoerd. Een driestaps procedure moet daarbij worden gevolgd:

- Transformeer WGS84  $\varphi, \lambda, N$  naar WGS84  $X, Y, Z$
- Pas coördinaattransformatie toe volgens (8.13)
- Transformeer Bessel  $X, Y, Z$  naar Bessel  $\varphi, \lambda, N$

(zie voor de eerste en derde stap bijvoorbeeld Strang van Hees, 1994). De transformatieparameters en de resulterende Bessel-geoïde horen bij elkaar! Kiest men ervoor om andere transformatieparameters te gebruiken tussen WGS84 en Bessel, dan moet daarmee uit de WGS84-geoïde een Bessel-geoïde worden uitgerekend die er anders uit zal zien dan de Bessel-geoïde in dit proefschrift. Het is dus voor hoogtebepalingen zeer belangrijk dat altijd met dezelfde transformatieparameters wordt gewerkt. De transformatieparameters van WGS84 naar Bessel zijn gegeven in tabel 8.2. Deze komen overeen met de transformatieparameters in de HTW (Kadaster, 1996). Deze transformatieparameters kunnen alleen binnen Nederland worden gebruikt. Voor de terugtransformatie kunnen deze parameters met tegengesteld teken worden gebruikt voor de rotatie rond het ellipsoïdische middelpunt (8.13) met een precisie van ongeveer 5 mm. Voor (8.14) is met dezelfde parameters met tegengesteld teken de terugtransformatie vrijwel exact. De Bessel-geoïde die uit de met GPS- en waterpasmetingen gecorrigeerde geoïde en deze transformatieparameters volgt wordt weergegeven in figuur 8.21.

**Tabel 8.2** *Transformatieparameters van WGS84 ( $x_1$  in (8.13)) naar Bessel (RD) ( $x_2$  in (8.13)). Ook voor de formulering volgens (8.14).*

Translaties (m)			Rotaties ( $10^{-6}$ rad)			Schaal
$T_x$	$T_y$	$T_z$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
-565.040	-49.910	-465.840	-1.9848	1.7439	-9.0587	$-4.0772 \cdot 10^{-6}$
$T_{x_o}$	$T_{y_o}$	$T_{z_o}$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
-593.036	-25.996	-478.742	-1.9848	1.7439	-9.0587	$-4.0772 \cdot 10^{-6}$

Voor de berekening van schietloodafwijkingen ten opzichte van Bessel, gegeven de astronomische en de RD-coördinaten, worden, uitgaande van (8.17), (8.18) en (8.19), de volgende vergelijkingen verkregen:

$$\Phi - \varphi = \xi - 0.394'' \quad (8.21)$$

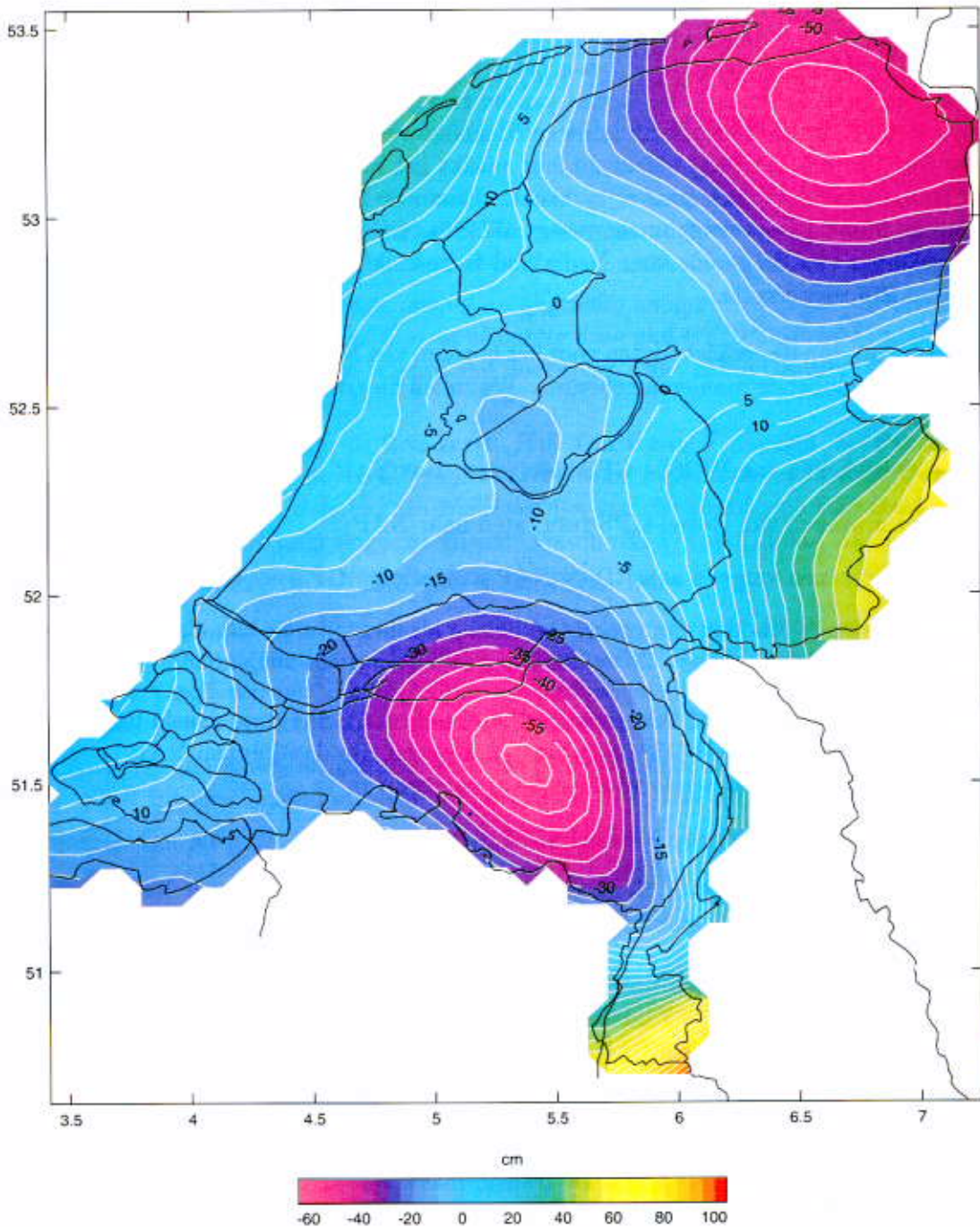
$$\Lambda - \lambda = \eta \sec \varphi - 1.868'' + 0.376'' \tan \varphi \quad (8.22)$$

$$\alpha_a - \alpha_e = \eta \tan \varphi + 0.376'' \sec \varphi. \quad (8.23)$$

De schietloodafwijkingen  $\xi$  en  $\eta$  die op deze manier worden berekend geven ook daadwerkelijk de helling van de Bessel-geoïde aan zoals die is afgebeeld in figuur 8.21.

Een betere *overall*-aansluiting tussen de Bessel-ellipsoïde en de geoïde zou kunnen worden verkregen door de vierde optie op bladzijde 195 te hanteren. Er kan een kleinste-kwadraten aansluiting van een vlak en de Bessel-geoïdehoogten op een groot aantal punten worden berekend. Bijvoorbeeld met de punten van een geoïdegrid van  $5 \times 5 \text{ km}^2$ . Uit de helling van dit vlak kunnen correcties aan de rotaties  $\alpha, \beta, \gamma$  (en daaruit  $\delta, \varepsilon$  en  $\nu$ ) worden berekend. Tevens volgt uit de gemiddelde waarde een correctie aan de lokale hoogtetranslatiecomponent in Amersfoort. Op deze manier wordt daadwerkelijk de beste realisatie van Bessel bereikt, zoals altijd is bedoeld. De hier gepresenteerde geoïde voor Nederland kan worden gebruikt om de optimale Bessel-realisatie te verwerkelijken. De Bessel-oriëntering zou met de nieuwe geoïde een lokale hellingcorrectie van 6 cm per 100 km in noord/zuid-richting en -3 cm per 100 km in oost/west-richting, en een lokale hoogtetranslatie van -8 cm in Amersfoort krijgen, ten opzichte van de hier gehanteerde transformatieparameters van Schut (1991), tabel 8.2. Door bewegingen van aardsschollen in de tijd treden ook veranderingen op in de ligging van Bessel ten opzichte van het astronomisch stelsel. Dit heeft nauwelijks invloed voor de transformatie

van absolute coördinaten, en geen invloed op relatieve metingen. Voor praktische doeleinden is het vooral van belang dat men altijd voor alle berekeningen (transformatie van metingen of coördinaten en van geoïdehoogten) dezelfde transformatieparameters gebruikt, en minder welke transformatieparameters worden gebruikt.



## 8.8 Gebruik van de geoïde in de praktijk

De geoïde voor Nederland zoals die is gepresenteerd in dit hoofdstuk is beschikbaar middels een computer-programma. Hierin is een 3'x5' geoïdegrid opgenomen. Voor elk willekeurig punt in Nederland wordt de geoïdehoogte uit dit grid berekend met Overhauser-splines (zie bijlage C). Deze interpolatiemethode heeft gunstige eigenschappen, zoals het continu zijn van de functie zelf en haar eerste afgeleiden bij overgang tussen de gridvlakken. Dit betekent dat ook de uit het geoïdegrid berekende schietloodafwijkingen continu zijn voor heel Nederland. De fouten van de gravimetrische geoïdehoogteverschillen en de met GPS/waterpassen verbeterde geoïdehoogteverschillen worden gegeven door respectievelijk (8.1) en (8.9). Voor de fout maakt het niet uit of WGS84-geoïdehoogten of Bessel-geoïdehoogten worden berekend. Er wordt hier nogmaals opgemerkt dat er geen onderscheid wordt gemaakt tussen WGS84, GRS80 en ETRS89. Het computer-programma met de geoïde voor Nederland is beschikbaar via de Meetkundige Dienst van de Rijkswaterstaat.

Het gebruik van de geoïdehoogten voor het bepalen van NAP-hoogten uit GPS-metingen kan op verschillende manieren gebeuren. We zullen hier drie methoden behandelen. Dit zijn

- Omrekenen van WGS84 GPS-resultaten naar NAP
- Omrekenen van Bessel GPS-resultaten naar NAP
- Omrekenen van een aan RD en NAP aangesloten GPS-netwerk naar NAP

De eerste twee methoden zijn vooral van belang als men primair in hoogten is geïnteresseerd uit de GPS-metingen. Ze zullen alle drie kort worden behandeld.

Als een GPS-baseline of GPS-netwerk is berekend in WGS84 door aansluiting aan 1 of enkele punten waarvan WGS84-coördinaten gegeven zijn dan kunnen NAP-hoogten  $H$  van de punten worden berekend door het toepassen van

$$H = h - N_{\text{WGS84}} , \quad (8.24)$$

waarin  $N_{\text{WGS84}}$  de met GPS/waterpassen gecorrigeerde geoïde voor Nederland (ten opzichte van WGS84) is, conform figuur 8.12.

Als een GPS-baseline of GPS-netwerk is berekend en dit vervolgens wordt getransformeerd naar Bessel coördinaten (en vervolgens naar RD en Bessel ellipsoïdische hoogten) dan bepaalt men NAP-hoogten  $H$  van de punten middels

$$H = h - N_{\text{Bessel}} , \quad (8.25)$$

waarin  $N_{\text{Bessel}}$  de met GPS/waterpassen gecorrigeerde geoïde voor Nederland ten opzichte van Bessel is (figuur 8.21). De transformatie van de GPS-resultaten naar Bessel moet dan wel zijn uitgevoerd met de transformatieparameters die zijn genoemd in de vorige paragraaf. Zijn er andere transformatieparameters gebruikt dan past de Bessel-geoïde uit het programma daar niet bij en kan men fouten tot enkele meters verkrijgen.

De derde mogelijkheid wordt toegepast als men zowel RD-coördinaten als NAP-hoogten wil bepalen. Dit is echter niet zo geschikt voor zeer preciese NAP-hoogtebepaling. De NAP-aansluithoogten moeten eerst worden geconverteerd naar Bessel ellipsoïdische hoogten. Vervolgens kan de aansluitingsvereffening worden uitgevoerd. Uiteindelijk moeten van de berekende Bessel ellipsoïdische hoogten de Bessel geoïdehoogten worden afgetrokken. Dus drie stappen:

- Converteer NAP-hoogte  $H$  van aansluitpunten naar Bessel ellipsoïdische hoogte  $h$  door  $h = H + N_{\text{Bessel}}$ .
- Doe een aansluitingsvereffening.
- Converteer de berekende Bessel ellipsoïdische hoogten  $h$  naar NAP-hoogten  $H$  middels  $H = h - N_{\text{Bessel}}$ .

Men moet hierbij bedenken dat door de aansluitingsvereffening automatisch een (set) transformatie(parameters) wordt bepaald en gebruikt. Deze hoeven niet gelijk te zijn aan de transformatieparameters die zijn gebruikt voor de Bessel geoïdeberekening. Dit kan zeker van belang zijn als slechts 3 aansluithoogten zijn gebruikt. Een fout in één van de aansluithoogten of de GPS-meting in dat aansluitpunt plant zich dan ongemerkt voort door het gehele netwerk. Zijn er veel meer aansluithoogten dan kan hier nog enigszins op getoetst worden.

Van het RD-net is bekend dat zich hierin vervormingen tot dm-niveau bevinden voor grotere gebieden. Dit is doorgaans geen probleem en kan worden opgelost door een aansluitingsvereffening uit te voeren. De impliciete transformatie die hierdoor wordt uitgevoerd kan echter ook doorwerken op de hoogterebesultaten. Er is hier een probleem dat het RD-stelsel eigenlijk iets kunstmatigs is zonder fysische betekenis, terwijl NAP-hoogten wel een fysische betekenis hebben. Als men zeer preciese NAP-hoogten uit een GPS-netwerk wil berekenen kan de berekening van RD-coördinaten en NAP-hoogten beter worden gescheiden door twee berekeningen uit te voeren. De RD-coördinaten middels een aansluitingsvereffening, de NAP-hoogten middels een directe conversie zoals de twee eerstgenoemde methoden. Meer onderzoek hiernaar is gewenst zodat de grootte van zulke mogelijke fouten wordt bepaald.

Het verwaarlozen van de absolute geoïdehoogten kan fouten in de NAP-hoogten opleveren van tientallen meters als met WGS84 wordt gewerkt of meerdere dm's als met Bessel wordt gewerkt. Als de verkeerde transformatieparameters tussen WGS84 en Bessel worden gebruikt dan kunnen fouten tot een meter binnen Nederland worden gemaakt. Als de geoïdehoogteverschillen worden verwaarloosd (door het gebruiken van een constante geoïdehoogte voor alle punten) of de geoïde wordt benaderd met een simpel vlak (middels een lokale transformatie), dat wordt bepaald door de aansluithoogten, dan kunnen fouten van cm tot dm-niveau worden gemaakt, afhankelijk van de afstand tussen de aansluitpunten. Is deze afstand 15 km, dan komen fouten van 4 cm binnen 5 km voor bij vlakbenadering, is deze afstand 30 km, dan kan dat meer dan een dm zijn. Het gebruik van de nieuwe geoïde voor Nederland is dus zeer wel aan te bevelen.



## 9 Conclusies

In Nederland is de geöïde met cm-precisie bepaald. Er zijn drie zaken die hieraan hebben bijgedragen. Ten eerste het tussen 1987 en 1995 geheel nieuw opgezette zwaartekrachtmetnet in Nederland, bestaande uit 4 nulde orde (absolute) metingen, bijna 2000 1e orde metingen, tot en met 13000 tweede orde metingen op 8000 punten met een onderlinge puntafstand van 2 km. Dit netwerk heeft een hoge dichtheid en een hoge precisie. Ten tweede de toegepaste geöïdeberekeningsmethode met de gecombineerde Meissl/Wong&Gore  $L = 32$  kernfunctie voor de combinatie van binnengebieddata en geopotentialmodel en de zeer preciese numerieke integratiemethode met nauwkeurige Stokes gewichten. Het gebruik van de gemodificeerde kernfunctie veroorzaakt dat de hoge frequenties in de geöïde geheel door de binnengebieddata worden bepaald, welke zeer goed zijn. Er is een afbreekfout van mm orde. Het gebruik van de juiste, geïntegreerde Stokes gewichten voorkomt fouten van cm-niveau. De derde factor die de cm-precisie heeft kunnen opleveren is het GPS/waterpas-netwerk. De puur gravimetrische geöïde heeft een langgolvlige fout van ongeveer 7 cm over 100 km. Met behulp van de GPS/waterpas-metingen, die een standaardafwijking van ongeveer 2 cm hebben over Nederland, kan ook de geöïde op de grote golflengten met deze precisie worden bepaald.

Het gebruik van de nieuwe Nederlandse zwaartekrachtdataset geeft een verbetering van een factor 2 in precisie ten opzichte van de oude dataset, in vergelijking met de 36 schietloodafwijkingen. De rms van de verschillen is voor de nieuwe dataset  $0.37''$  en voor de oude dataset  $0.73''$ . De precisie van de schietloodafwijkingen is ongeveer  $0.35''$ .

Het toepassen van één van de kernfunctiemodificaties Meissl, Meissl/Wong&Gore  $L = 32$  of Meissl/Wong&Gore  $L = 46$  geeft een veel betere overeenkomst met externe geöïde-informatie dan de gewone combinatie-oplossing. Voor met GPS/waterpassen gecorrigeerde geöïdehoogten wordt een rms van de verschillen gevonden van respectievelijk 12 mm en 50 mm met de GPS/waterpas-resultaten. Voor de schietloodafwijkingen vindt men respectievelijk  $0.36''$  en  $0.40''$ , terwijl de standaardafwijking van de schietloodafwijkingen ongeveer  $0.35''$  is. Een betere overeenkomst kan dus niet worden verwacht.

De verschillende kernfunctiemodificaties geven vrij grote verschillen tussen de daarmee berekende gravimetrische geöïde-oplossingen. Het betreft hier niet alleen het gemiddelde verschil, maar ook de hellingen van de gravimetrische geöïdes verschillen vrij veel. Deze verschillen zijn langgolvig van karakter en kunnen van dm-niveau zijn. Deze grote verschillen worden veroorzaakt doordat de langgolvlige zwaartekrachtdata uit het geopotentialmodel veel verschillen met de langgolvlige zwaartekrachtinformatie die beschikbaar is in Europa. Als het geopotentialmodel en de binnengebieddata goed overeenkomen, en dus dezelfde spectrale inhoud hebben, maakt de toegepaste kern-

functie niet veel uit tot graad 360. Echter, boven graad 360 wordt bij de Molodenskii-combinatie (toepassing van de normale Stokes functie) een relatief groot deel van het gewicht aan nul-data gegeven. Het is dus belangrijk in ieder geval een kernfunctie te kiezen die spectrale gewichten dicht bij 1 geeft voor hoge graden. Dit doen alle hier beschouwde kernfuncties behalve de normale Stokes functie. Komen de signaalinhouden op lage graden van het geopotentialmodel en de binnengebieddata niet overeen, dan is keuze van de kernfunctie van grote invloed op het gravimetrische geoideresultaat, zoals voor Nederland blijkt.

Wordt er een langgolvige correctie aangebracht aan de gravimetrische geoïde op basis van externe geoïde-informatie, dan resteren slechts kleine verschillen voor de verschillende kernfuncties, behalve voor de gewone Stokes functie door de grote afbreekfout. De verschillen tussen de drie oplossingen met een kleine afbreekfout (Meissl, Meissl/Wong&Gore  $L = 32$  en Meissl/Wong&Gore  $L = 46$ ) zijn maximaal enkele cm. De keuze voor de uiteindelijk toegepaste kernfunctiemodificatie voor Nederland volgt uit de vergelijking met GPS/waterpas-metingen, omdat op basis van puur theoretische argumenten geen eenduidige keuze kan worden gemaakt. Er is echter te weinig informatie van goede kwaliteit beschikbaar om werkelijk de beste keuze te kunnen maken. Volgens de vergelijking met de wel beschikbare data is elk van de drie methoden geschikt. De oplossing die in het midden ligt van de mogelijkheden, de gecombineerde Meissl/Wong&Gore  $L = 32$  kernfunctie, komt net iets beter overeen, en is daarom toegepast.

De vorm van de correctie die wordt aangebracht hangt af van de gebruikte kernfunctie. Er is een methode gepresenteerd die kan worden gebruikt om te bepalen welke vorm het correctievlak moet hebben. Voor een klein gebied als Nederland, bijvoorbeeld  $200 \times 200 \text{ km}^2$ , is voor de toegepaste kernfunctiemodificatie een simpel vlak voldoende. Voor een groter gebied, zoals bijvoorbeeld Europa, is dit echter niet het geval. Hierbij dienen veel complexere correctiefuncties te worden aangebracht.

De rms van de resterende verschillen op de 17 GPS/waterpas-punten bedraagt 12 mm. Dit komt overeen met de totale ruis van geoïde, waterpassing en GPS-meting. In de correctievlak-berekening, waar de volledige covariantiematrix van de GPS-metingen wordt gebruikt, worden geen punten verworpen in de toetsing. We hebben ook laten zien dat met een groter binnengebied een betere geoïde wordt verkregen. De verschillen die volgen uit de voor Nederland bepaalde geoïde en 37 GPS/waterpas-metingen in een gebied van ongeveer  $50 \times 70 \text{ km}^2$  in Groningen hebben een rms van 6 mm. Deze verschillen vertonen een systematisch patroon. Wordt nog een lokale vlakcorrectie aangebracht, met een helling van ongeveer één cm over 60 km, dan resteert een rms van slechts 4 mm. Dit komt overeen met de standaardafwijking van de GPS/waterpas-metingen.

In dit proefschrift is een nieuwe manier gepresenteerd om de empirische covariantiefunctie te bepalen. Deze nieuwe manier geeft een realistischer resultaat dan de bestaande methode. Dit is zeer belangrijk om realistische fout-schattingen te krijgen voor gemiddelde blokwaarden.

Tevens is een nieuwe modificatie aan de conventionele collocatie-formule aangebracht,

waarmee een efficiënte combinatie van collocatie en numerieke integratie mogelijk is. Om deze combinatie verder te optimaliseren moet worden onderzocht of ook de afbreekcoëfficiënten voor rechthoekige gebieden kunnen worden ingebracht. Voor de Nederlandse geoidberekening is numerieke integratie over blokgebieden toegepast.

Met een zwaartekrachtdataset als de nieuwe Nederlandse, met een hoge punt dichtheid en een goede precisie is de beste manier om gemiddelde blokwaarden te berekenen de kleinste-kwadraten predictiemethode met gebruik van een steungebied met een straal ongeveer gelijk aan 1.2 maal de blokzijdelengte (ongeveer 4.5 maal de oppervlakte van het blokgebied zelf). Dit geeft niet alleen de kleinste standaardafwijking voor de gemiddelde blokwaarde maar ook de kleinste geoidfout.

De standaardafwijking van geoidhoogteverschillen ten gevolge van de binnengebied-data in Nederland is 1-2 mm. De afbreekfout bij de berekening met 3'x5' gemiddelde blokwaarden bedraagt 2 mm. Als met slechts een kwart van de beschikbare punten wordt gemeten dan worden verschillen in de geoid tot 5-10 mm gevonden. De standaardafwijking van de geoid is een factor 4 groter dan bij gebruik van de volledige dataset.

Voor de geoid in het zuidelijke deel van Nederland geeft de beschikbare zwaartekracht-data in België een probleem. Door de mindere kwaliteit (dichtheid en precisie) van deze data is de standaardafwijking van de geoid meerdere cm. Een verbetering van deze data en een kwaliteitsanalyse en eventuele verbetering van de data in de Noordzee direct aan de kust zijn mogelijke aandachtspunten bij verbetering van de geoid voor Nederland in de toekomst.

In Nederland is een project uitgevoerd dat uniek mag worden genoemd. In een tijdsbestek van ongeveer 10 jaar is het volledige traject voor cm-geoidberekening doorlopen. Er zijn absolute, eerste orde en tweede orde zwaartekrachtmetingen, en zeezwaartekrachtmetingen op Waddenzee, IJsselmeer en Noordzee verricht die cm-precisie mogelijk maken. Daarnaast is een berekeningsprocedure ontwikkeld bestaande uit gemodificeerde combinatie-oplossing en evaluatietechniek die voor cm-berekeningen geschikt is. Als beloning voor deze enorme inspanning door de Faculteit der Geodesie van de TU Delft en de Meetkundige Dienst van de Rijkswaterstaat beschikt Nederland nu over een geoid met een precisie van 1-2 cm.

Een goede controle en verbetermogelijkheid van de geoid, met name voor de golf-lengten 20-200 km, wordt verkregen als de 5e Nauwkeurigheidswaterpassing van de Rijkswaterstaat (Lorenz, 1994) gereed zal zijn. In dit project wordt, onder andere, op ongeveer 200 punten zeer preciese GPS- en waterpasmetingen gedaan. Deze resultaten zullen vermoedelijk in 1998 beschikbaar komen. Ook rond die tijd zal het GPS-kernnet van de Rijksdriehoeksmeting van het Kadaster klaar zijn (Van Buren, 1993). Dit net zal bestaan uit ongeveer 440 punten waarvan ook GPS-hoogten en waterpashoogten bekend zullen zijn. Als de kwaliteit van deze beide datasets van (sub)cm-niveau is voor afstanden tot 50 km dan kan daaruit een correctiemodel voor de hier gepresenteerde geoid worden bepaald. Hierdoor zal dan voor Nederland de geoid met een precisie van 5-10 mm bekend zijn.

# Literatuur

- Atlas van Nederland *Bougueranomaliëenkaart*, Blad II-7, Topografische Dienst, 1970
- Bakker G. *Maps of mean elevations, free-air and Bouguer anomalies for a grid of 3' latitude by 5' longitude*, Geodetic Institute, Technical University of Delft, 1963
- Bakker G., J.C. de Munck, G.L. Strang van Hees *Radiopositioning at sea*, Delft University Press, 1985
- Basič T. *Untersuchungen zur regionalen Geoidbestimmung mit 'dm'-Genauigkeit* Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 157, 1989
- Basič T., R.H. Rapp *Oceanwide prediction of gravity anomalies and sea surface heights using Geos-3, Seasat, and Geosat altimeter data and ETOPO5U bathymetric data*, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Columbus, Ohio, Report No. 416, 1992
- Bless M.J.M., W. Bosum, J. Bouckaert, H.J. Dürbaum, F. Kockel, E. Paproth, H. Querfurth, P. van Rooyen *Geophysikalische Untersuchungen am Ost-Rand des Brabanter Massivs in Belgien, den Niederlanden und der Bundesrepublik Deutschland*, Mededelingen Rijksgeologische Dienst, Volume 32-17, pp.313-343, 1980
- Bomford G. *Geodesy*, 3rd edition, Clarendon Press, Oxford, 1970
- Brouwer F.J.J., E.J. de Min *On the definition of a European height system*, Report on the symposium of the IAG Subcommission for EUREF, Warsaw, Poland, June 8-11, Veröffentlichungen der Bayerischen Kommission für die Internationale Erdmessung, Astronomisch-Geodätische Arbeiten, Heft Nr. 54, 1994
- Bruyn J.W. de *Gravity measurements in the Netherlands*, Geological Report No. 23941, Shell Internationale Petroleum Maatschappij NV, The Hague, March, 1951
- Buren J. van *NEREF*, GPS Nieuwsbrief, Nederlandse Commissie voor Geodesie, nummer 2, 1991
- Buren J. van *GPS-kernnet*, GPS Nieuwsbrief, Nederlandse Commissie voor Geodesie, nummer 1, 1993
- Burger M.G. *Geoid determination by an alternative estimation method*, Afstudeerscriptie Faculteit der Geodesie, Technische Universiteit Delft, 1993
- Campbell S. *Letter to R. Smith of Shell Internationale Petroleum Maatschappij NV*, 19th October, 1992
- Chandrasekhar S. *Ellipsoidal figures of equilibrium*, New Haven and London, Yale University Press, 1969
- Day G.A., O.B. Andersen, K. Engsager, E.G. Finnstrom, J. Hospers, T. Liebe, J. Makris, S. Plaumann, G.L. Strang van Hees, S.A. Walter *North Sea gravity map*, in *Tectonic Evolution of the North Sea Rifts*, eds. D.J. Blundell, A.D. Gibbs, Oxford Scientific Publications, England, pp.64-70, 1990

- Denker H. *Hochauflösende regionale Schwerefeldbestimmung mit gravimetrischen und topografischen Daten*, Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 156, 1988
- Denker H. *A new gravimetric quasigeoid for the Federal Republic of Germany*, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft Nr. 291, 1989
- Ecker E., E. Mittermayer *Gravity corrections for the influence of the atmosphere*, Bollettino di Geofisica teorica ed applicata, Trieste, Vol. XI, pp.70-80, 1969
- Fairhead D. *WEEGP West-East European gravity project*, Bulletin d'Information, Bureau Gravimétrique, No 74, 1994
- Fan H. *Geoid determination by global geopotential models and integral formulas*, Reports of the Department of Geodesy, The Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, Trita Geod 1019, 1989
- Featherstone W.E. *A GPS controlled gravimetric determination of the geoid of the British isles*, Proefschrift University of Oxford, Department of Earth Sciences, 1992
- Forsberg R., C.C. Tscherning *The use of height data in gravity field approximation by collocation*, Journal of Geophysical Research, Vol. 86, No B9, pp.7843-7854, September 10, 1981
- Gaposchkin E.M. *Averaging on the surface of a sphere*, Journal of Geophysical Research, Vol. 85, No B6, pp.3187-3193, June 10, 1980
- Geiger A. *Gravimetrisches Geoid der Schweiz: Potentialtheoretische Untersuchungen zum Schwerefeld im Alpenraum*, Geodätisch-geophysikalische Arbeiten in der Schweiz, 43er Band, 1990
- Gerrard S.M.E. *The geoid, GPS and levelling*, Ph.D.-thesis Institute of engineering surveying and space geodesy, University of Nottingham, 1990
- Haagmans R.H.N., G.J. Husti, P. Plugers, J.H.M. Smit, G.L. Strang van Hees *NAV-GRAV navigation and gravimetric experiment at the North Sea*, Netherlands Geodetic Commission, New series, Number 32, 1988
- Haagmans R.H.N., M. van Gelderen *Error variances-covariances of GEM-T1: their characteristics and implications in geoid computation*, Journal of Geophysical Research, Vol. 96, No B12, pp.20011-20022, November 10, 1991
- Haagmans R.H.N., E.J. de Min, M. van Gelderen *Fast evaluation of convolution integrals on the sphere using 1D FFT, and a comparison with existing methods for Stokes integral*, manuscripta geodaetica, Vol. 18, pp.227-241, 1993
- Haas A.G., J.R. Viallix *Krigeage applied to geophysics: the answer to the problem of estimates and contouring*, Geophysical Prospecting, 24, pp.49-69, 1976
- Heck B. *The non-linear geodetic boundary value problem in quadratic approximation*, manuscripta geodaetica, Vol. 13, pp.337-348, 1988
- Heck B. *On the non-linear geodetic boundary value problem for a fixed boundary surface*, Bulletin Géodésique, Vol. 63, pp.57-67, 1989a
- Heck B. *A contribution to the scalar free boundary value problem of physical geodesy*, manuscripta geodaetica, Vol. 14, pp.87-99, 1989b

- Heck B. *An evaluation of some systematic error sources affecting terrestrial gravity anomalies*, Bulletin Géodésique, Vol. 64, pp.88-108, 1990
- Heck B. *On the linearized boundary value problems of physical geodesy*, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Columbus, Ohio, Report No. 407, 1991
- Heck B., W. Grüniger *Zur Genauigkeit gravimetrisch bestimmter absoluter und relativer Geoidhöhen*, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft Nr. 97, 1983
- Heck B., W. Grüniger *Modification of Stokes integral formula by combining two classical approaches*, Proceedings of XIX IUGG General Assembly, Vancouver, Canada, 1987
- Heck B., K. Seitz *Effects of non-linearity in the geodetic boundary value problems*, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft Nr. 109, 1992
- Hein G.W., K. Lenze *Zur Genauigkeit und Wirtschaftlichkeit verschiedenen Interpolations- und Prädiktionsmethoden*, Zeitschrift für Vermessungswesen, Heft 11, 1979
- Heiskanen W.A., H. Moritz *Physical geodesy*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1967
- Helmert F.R. *Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, Einleitung und I. Teil: die mathematischen Theorien*, Leipzig, 1880
- Heuvelink H.J. *De stereografische kaartprojectie en hare toepassing*, Uitgave van de Rijkscommissie voor Graadmeting en Waterpassing, Delft, 1918
- Husti G.J. *Geodetic-astronomical observations in The Netherlands, 1947-1973*, Netherlands Geodetic Commission, New series, Volume 6, Number 1, 1975
- Husti G.J. *Deviations of the vertical in The Netherlands from geodetic-astronomical observations*, Netherlands Geodetic Commission, New series, Volume 6, Number 3, 1978
- IAG *Geodetic Reference System 1967*, Special publication, Bulletin Géodésique, 1970
- Kadaster *Handleiding voor de Technische Werkzaamheden van het Kadaster Apeldoorn*, in druk, 1996
- Kearsley A.H.W. *Tests on the recovery of precise geoid height differences from gravimetry*, Journal of Geophysical Research, Vol. 93, No B6, pp.6559-6570, June 10, 1988
- Klees R.A.P. *Lösung des fixen geodätischen Randwertproblems mit Hilfe der Randelementmethode*, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 382, 1992
- Knudsen P. *Estimation and modelling of the local empirical covariance function using gravity and satellite altimeter data*, Bulletin Géodésique, Vol. 61, pp.145-160, 1987
- Krarpup T. *A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy*, Geodætisk Institut, Kobenhavn, Denmark, 1969
- Kumar M. *World Geodetic System 1984: A modern and accurate global reference frame*, Marine Geodesy, Volume 12, pp.117-126, 1988

- Lachapelle G. *Estimation of disturbing potential components using a combined integral formulae and collocation approach*, manuscripta geodaetica, Vol. 2, pp.233-262, 1977
- Lelgemann D. *Untersuchungen zu einer genaueren Lösung des Problems von Stokes*, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 155, 1970
- Li Y.C., M.G. Sideris, K.-P. Schwarz *A numerical investigation on height anomaly prediction in mountainous areas*, Bulletin Géodésique, Vol. 69, No. 3, pp.143-156, 1995
- Lorenz G.K. *Projectplan 5e Nauwkeurigheidswaterpassing Rijkswaterstaat*, interne rapportage Meetkundige Dienst, Rijkswaterstaat, 1994
- Lynn P.A. *An introduction to the analysis and processing of signals*, The Macmillan Press Ltd, 1973
- Mather, R.S. *A solution of the geodetic boundary value problem to order  $e^3$* , Report X-592-73-11, Goddard Space Flight Center, 1973
- Meissl P. *Preparations for the numerical evaluation of second order Molodenskii-type formulas*, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Columbus, Ohio, Report No. 163, 1971
- Min E.J. de *On the computation of the geoid, with special attention to the inner zone*, Afstudeerscriptie Faculteit der Geodesie, Technische Universiteit Delft, 1990
- Min E.J. de *A comparison of three geoid computation methods*, EGS XVIII General Assembly, Wiesbaden, Germany, 1993
- Min E.J. de *On the numerical evaluation of Stokes' integral*, Bulletin of the International Geoid Service, No 3, Milan, december, 1994
- Min E.J. de *Het eerste orde zwaartekrachtmetnet van Nederland en het Nederlands zwaartekrachtmetdatum 1993 (NEDZWA93)*, Nederlandse Commissie voor Geodesie, Nederlandse reeks, Publikatie 32, 1995a
- Min E.J. de *Using Rapp's global geopotential models OSU89 and OSU91 in local geoid combination solutions*, presented at EGS XX General Assembly, 3-7 April, Hamburg, Germany, 1995b
- Min E.J. de *A comparison of Stokes' numerical integration and least-squares collocation, and a new combination technique*, Bulletin Géodésique, Vol. 69, pp.223-232, 1995c
- Molendijk R.E., J.F. Zomerdijk *NEREF'94: tussenrapportage verwerking NEREF'94 GPS-campagne* Meetkundige Dienst, Rijkswaterstaat, 1996
- Molodenskii M.S., V.F. Eremeev, M.I. Yurkina *Methods for study of the external gravitational field and figure of the earth*, Israel program for scientific translations, Jerusalem, 1962
- Moritz H. *Geodetic reference system 1967*, Bulletin Géodésique, Publication Spéciale No 3, 1971
- Moritz H. *Precise gravimetric geodesy*, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Columbus, Ohio, Report No. 219, 1974

- Moritz H. *Die Zukunft der gravimetrischen Geodäsie*, Zeitschrift für Vermessungswesen, Heft 1, 1975
- Moritz H. *Least squares collocation*, manuscripta geodaetica, Vol. 1, pp.1-40, 1976
- Moritz H. *Advanced physical geodesy*, Wichmann Karlsruhe, 1980a
- Moritz H. *Geodetic reference system 1980*, Bulletin Géodésique, Vol. 54, pp.395-405, 1980b
- Nohlmans R.A.M. *Gravity measurements, processing and evaluation; test cases de Peel and South-Limburg*, Afstudeerscriptie Faculteit der Geodesie, Technische Universiteit Delft, 1990
- Paul M.K. *A method of evaluating the truncation error coefficients for geoidal height*, Bulletin Géodésique, Vol. 110, pp.413-425, 1973
- Pavlis N.K. *Modeling and estimation of a low degree geopotential model from terrestrial gravity data*, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Columbus, Ohio, Report No. 386, 1988
- Press W.H., S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery *Numerical recipes in Fortran - The art of scientific programming*, Second edition, Cambridge University Press, 1992
- Rapp R.H., R. Rummel *Methods for the computation of detailed geoids and their accuracy*, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Columbus, Ohio, Report No. 233, 1975
- Rapp R.H., N.K. Pavlis *The development and analysis of geopotential coefficient models to spherical harmonic degree 360*, Journal of Geophysical Research, Vol. 95, No. B13, pp.21885-21911, 1990
- Rapp R.H., Y.M. Wang, N.K. Pavlis *The Ohio State 1991 geopotential and sea surface topography harmonic coefficient models*, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Columbus, Ohio, Report No. 410, 1991
- Ree R.E. van *Absolute zwaartekracht in Nederland*, Afstudeerscriptie Faculteit der Geodesie, Technische Universiteit Delft, 1991
- Rummel R. *Gravity parameter estimation from large data sets using stabilized integral formulas and a numerical integration based on discrete point data*, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Columbus, Ohio, Report No. 339, 1982
- Rummel R. *Collegedictaat fysische geodesie II, ge13*, Faculteit der Geodesie, Technische Universiteit Delft, 1990
- Schreutelkamp F.H., W. de Graaff *Astronomisch nivellement: controle van de Nederlandse gravimetrische geöide van Van Willigen (1985)*, Stichting 'De Koepel', Sterrenwacht Sonnenborgh, Utrecht, 1995
- Schut T.G. *Transformatieparameters voor RD naar WGS84*, GPS Nieuwsbrief, Nederlandse Commissie voor Geodesie, oktober, 1991
- Schwarz K.P., M.G. Sideris, R. Forsberg *The use of FFT techniques in physical geodesy*, Geophysical Journal International, Vol. 100, pp.485-514, 1990



- Seeber G. *Satellite geodesy*, Walter de Gruyter, Berlin New York, 1993
- Sevilla M.J., G. Rodriguez-Caderot, A.J. Gil *Analysis of the Medigeo92, a gravimetric geoid in the Mediterranean Sea*, Proceedings of session G3 - European Geophysical Society XVIII General Assembly, Wiesbaden, Germany, May 3-7, 1993
- Sideris M.G., B.B. She *A new high-resolution geoid for Canada and part of the U.S. by the 1D-FFT method*, Bulletin Géodésique, Vol. 69, pp.92-108, 1995
- Sjöberg L.E. *A recurrence relation for the  $\beta_n$ -function*, Bulletin Géodésique, Vol. 54, pp.69-72, 1980
- Sjöberg L.E. *Comparison of some methods of modifying Stokes formula*, Proceedings of the international symposium on the definition of the geoid, Florence, 26-30 May, pp.577-597, 1986
- Sjöberg L.E., S.H. Stocki *The accuracy of geoid undulations determined by modification of Stokes formula using GEM9 potential coefficients*, Proceedings of I Hotine-Marussi symposium, Rome, 1986
- Smeets I. *Modellering en foutenanalyse van een precisiegeoid op centimeter-niveau*, Proefschrift Katholieke Universiteit Leuven, Faculteit der Wetenschappen, 1992
- Stokes G.G. *On the variation of gravity on the surface of the earth*, Transact. Cambridge phil. Society, 8, pp.672-695, 1849
- Strang van Hees G.L. *Orientation of the ellipsoid in geodetic networks*, Delft Progress Report, 3, pp.35-38, 1977
- Strang van Hees G.L. *Gravity survey of the North Sea*, Marine Geodesy, Vol. 6, No. 2, 1983
- Strang van Hees G.L. *Precision of the geoid, computed from terrestrial gravity measurements*, manuscripta geodaetica, Vol. 11, pp.1-14, 1986
- Strang van Hees G.L. *Globale en lokale geodetische systemen*, Nederlandse Commissie voor Geodesie, Nederlandse reeks, Publikatie 30, 1994
- Strang van Hees G.L., G.K. Lorenz, E.J. de Min, L. Timmen, W. Torge *Absolute gravity measurements in the Netherlands 1991-1993*, Netherlands Geodetic Commission, New series, in press, 1996
- Torge W. *Gravimetry*, Walter de Gruyter, Berlin New York, 1989
- Torge W. *Geodesy*, 2nd edition, Walter de Gruyter, Berlin New York, 1991
- Torge W., G. Weber, H.-G. Wenzel *6 by 10 minute free air gravity anomalies for Europe including marine areas*, Marine Geophysical Researches, Vol. 7, pp.93-111, 1984a
- Torge W., G. Weber, H.-G. Wenzel *High resolution gravimetric geoid heights and gravimetric deflections of the vertical of Europe including marine areas*, Marine Geophysical Research, Vol. 7, pp.149-175, 1984b
- Tscherning C.C., R.H. Rapp *Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations, and deflections of the vertical implied by anomaly degree variance models*, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Columbus, Ohio, Report No. 208, 1974

- Vanicek P., Z. Martinec *The Stokes-Helmert scheme for the evaluation of a precise geoid*, manuscripta geodaetica, Vol. 19, pp.119-128, 1994
- Vermeer M. *Present status of the European geoid*, First continental workshop on the geoid in Europe, Prague, May 11-14, 1992
- Weber G. *Hochauflösende mittlere Freiluftanomalien und gravimetrische Lotabweichungen für Europa*, Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 135, 1984
- Weelden A. van *History of gravity observations in the Netherlands*, In: Verhandelingen van het Koninklijk Nederlandsch Geologisch-Mijnbouwkundig Genootschap, Geologische serie deel XVIII, (Gedenkboek F.A. Vening Meinesz), 1957
- Weesie E.J.M. *WADGRAV zeegravimetrie binnen Nederland*, Afstudeerscriptie Faculteit der Geodesie, Technische Universiteit Delft, 1993
- Wenzel H.-G. *Zur Geoidbestimmung durch Kombination von Schwereanomalien und einem Kugelfunktionsmodell mit Hilfe von Integralformeln*, Zeitschrift für Vermessungswesen, Heft 3, 1981
- Wenzel H.-G. *Hochauflösende Kugelfunktionsmodelle für das Gravitationspotential der Erde*, Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 137, 1985
- Wenzel H.-G., D. Arabelos *Zur Schätzung von Anomalie-Gradvarianzen aus lokalen empirischen Kovarianzfunktionen*, Zeitschrift für Vermessungswesen, Heft 5, 1981
- Willigen G.W. van *De berekening van de gravimetrische geöïde van Nederland*, Afstudeerscriptie Faculteit der Geodesie, Technische Universiteit Delft, 1985
- Wong L., R. Gore *Accuracy of geoid heights from modified Stokes kernels*, Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 18, pp.81-91, 1969

# A Spectrale uitdrukkingen en relaties voor zwaartekrachtveld-afhankelijke functies

In deze bijlage is een uitleg en afleiding opgenomen van verschillende spectrale uitdrukkingen. Deze uitdrukkingen spelen een belangrijke rol in de fysische geodesie, omdat ingewikkelde bewerkingen in het ruimtedomein in het spectrale domein eenvoudig en inzichtelijk worden. De eerste paragraaf gaat over algemene spectrale uitdrukkingen en relaties, terwijl in de tweede vooral wordt ingegaan op spectrale bewerkingen die bij kleinste-kwadraten collocatie van belang zijn.

## A.1 Spectrale uitdrukkingen en relaties

Een gegeven functie op de bol kan worden geschreven als een som van bolfuncties.

$$f(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_{nm} \bar{Y}_{nm}(\varphi_P, \lambda_P) . \quad (\text{A.1})$$

Hierin zijn  $f_{nm}$  de bolfunctiecoëfficiënten,  $\varphi$  en  $\lambda$  de geocentrische coördinaten van punt  $P$ , en  $\bar{Y}_{nm}(P)$  de genormaliseerde bolfuncties. Deze zijn combinaties van de genormaliseerde geassocieerde Legendre functies  $\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$  met cos- en sin-functies:  $\bar{Y}_{nm}(P) = \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \cos m\lambda$  voor  $m \geq 0$  en  $\bar{P}_{n|m|}(\sin \varphi) \sin |m|\lambda$  voor  $m < 0$ .

De spectrale coëfficiënten (bolfunctiecoëfficiënten) van een functie kunnen worden berekend met (Heiskanen&Moritz, 1967, p.31)

$$f_{nm} = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} f(Q) \bar{Y}_{nm}(Q) d\sigma_Q , \quad (\text{A.2})$$

Dit kan worden bewezen met toepassing van en de orthogonaliteitsrelaties van sferisch harmonische functies (ibid, p.31)

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \bar{Y}_{nm}(P) \bar{Y}_{n'm'}(P) d\sigma = \delta_{nn'} \delta_{mm'} . \quad (\text{A.3})$$

Er wordt ook soms geschreven

$$f_n(P) = \sum_{m=-n}^n f_{nm} \bar{Y}_{nm}(P) . \quad (\text{A.4})$$

Met behulp van (A.2) en het decompositietheorema (Heiskanen&Moritz, 1967, p.33)

$$P_n(\cos \psi_{PQ}) = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=-n}^n \bar{Y}_{nm}(P) \bar{Y}_{nm}(Q) , \quad (\text{A.5})$$

kan men dan vinden

$$f_n(P) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\sigma} f(Q) P_n(\cos \psi_{PQ}) d\sigma_Q . \quad (\text{A.6})$$

In deze formules is de verkorte notatie voor de integratie over de bol gebruikt, nl.

$$\int_{\sigma} d\sigma = \int_{\varphi} \int_{\lambda} \cos \varphi d\lambda d\varphi = \int_{\alpha} \int_{\psi} \sin \psi d\psi d\alpha . \quad (\text{A.7})$$

De stoorpotentiaal  $T$  kan worden geschreven als een harmonische reeks, omdat  $T$  voldoet aan Laplace vergelijking (Heiskanen&Moritz, 1967). Deze uitdrukking is

$$\begin{aligned} T(P) &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=-n}^n T_{nm} \bar{Y}_{nm}(P) \\ &= \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=-n}^n \overline{\Delta C}_{nm} \bar{Y}_{nm}(P) , \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

met  $\overline{\Delta C}_{nm}$  de genormaliseerde sferisch harmonische coëfficiënten (dimensieloos voor de stoorpotentiaal). De sommatie over graad  $n$  begint eigenlijk bij graad 0, maar door de veronderstelling dat de generende massa van het normaalpotentiaalveld  $U$  gelijk is aan de werkelijke massa van de aarde, en dat het gebruikte coördinaatstelsel haar oorsprong heeft in het massacentrum van de aarde, hebben de coëfficiënten van graad  $n = 0$  en  $n = 1$  alle de waarde 0. De sommatie wordt daarom bij graad 2 begonnen. Met Bruns vergelijking (2.2) vinden we voor de geoidhoogte op aarde ( $r = R$ )

$$N(P) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n N_{nm} \bar{Y}_{nm}(P) = R \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \overline{\Delta C}_{nm} \bar{Y}_{nm}(P) . \quad (\text{A.9})$$

Met behulp van de fundamentele vergelijking van de fysische geodesie in sferische approximatie (Heiskanen&Moritz, 1967, p.88)

$$\Delta g - \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T , \quad (\text{A.10})$$

kan uit (A.8) voor de zwaartekrachtanomalieën de sferisch harmonische of spectrale uitdrukking

$$\begin{aligned} \Delta g(P) &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \Delta g_{nm} \bar{Y}_{nm}(P) \\ &= \frac{GM}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \sum_{m=-n}^n \overline{\Delta C}_{nm} \bar{Y}_{nm}(P) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

worden afgeleid. Deze uitdrukking en volgende uitdrukkingen zijn bepaald voor het aardoppervlak waarvoor geldt  $r = R$ .

Uit een vergelijking van de formules (A.9) en (A.11) volgt dan dat

$$N_{nm} = \frac{R}{\gamma(n-1)} \Delta g_{nm} . \quad (\text{A.12})$$

De relatie die geldt tussen de spectrale coëfficiënten van twee lineaire functionalen van de stoorpotentiaal wordt eigenwaarde genoemd, omdat de bolfuncties  $\bar{Y}_{nm}(\varphi, \lambda)$  de eigenfuncties zijn van de wereldwijde integraaloperatoren die de grootheden in het ruimtedomein (op de bol) relateren, bijvoorbeeld de Stokes operator

$$\frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} St(\psi) \cdot d\sigma. \quad (\text{A.13})$$

Enkele voorbeelden van zulke eigenwaarden zijn

- zwaartekrachtanomalieën naar stoorpotentiaal  $\lambda_n = \frac{R}{(n-1)}$ ,
- geöide naar stoorpotentiaal  $\lambda_n = \gamma$  (Bruns), en dus
- zwaartekrachtanomalieën naar geöide  $\lambda_n = \frac{R}{\gamma(n-1)}$  (A.13).

Het vermenigvuldigen met deze eigenwaarde in het spectrum is volledig equivalent aan het toepassen van de lineaire operator die geldt tussen twee grootheden in het ruimtedomein (op de bol). Zo is dus (A.12) equivalent aan de Stokes integraal (2.5) of (A.13) voor  $r = R$  als  $\overline{\Delta C}_{nm}$  is bepaald met behulp van (A.2) en (A.11). Dit kan ook worden gezien door de spectrale uitdrukking voor de zwaartekrachtanomalieën (A.11) in te vullen in (2.5) en (2.4) te gebruiken,

$$N(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi_{PQ}) \right) \cdot \quad (\text{A.14})$$

$$\left( \frac{GM}{R^2} \sum_{n'=2}^{\infty} (n'-1) \sum_{m'=-n'}^{n'} \bar{Y}_{n'm'}(Q) \right) d\sigma.$$

Door nu het decompositie theorema (A.5) en de orthogonaliteitsrelaties van sferisch harmonische functies (A.3) toe te passen kan dit worden geschreven als

$$N(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{nm} \frac{2n+1}{n-1} \sum_{n'm'} \Delta g_{n'm'} \frac{1}{2n+1} \bar{Y}_{nm}(P) \int_{\sigma} \bar{Y}_{nm}(Q) \bar{Y}_{n'm'}(Q) d\sigma_Q \quad (\text{A.15})$$

$$= \frac{R}{\gamma} \sum_{nm} \frac{1}{n-1} \sum_{n'm'} \Delta g_{n'm'} \bar{Y}_{n'm'}(P) \delta_{nn'} \delta_{mm'}$$

$$= \frac{R}{\gamma} \sum_n \frac{1}{n-1} \sum_m \Delta g_{nm} \bar{Y}_{nm}(P).$$

Met (A.9) volgt dan dat  $N_{nm} = \frac{R}{\gamma(n-1)} \Delta g_{nm}$  wat weer (A.12) is.

Alle relaties die van belang zijn zijn nu genoemd, zowel in het ruimtedomein als in het spectrale bolfunctiedomein. Verder is getoond hoe een functie in het ruimtedomein kan worden omgeschreven naar de coëfficiënten van het spectrale domein. Het is belangrijk op te merken dat de transformatie van de ene ruimte naar de andere ruimte alleen opgaat wanneer de functiewaarden globaal (wereldwijd) zijn gegeven. De orthogonaliteitsrelaties van bolfuncties (A.3) die ten grondslag liggen aan de transformatie naar het spectrum en andersom gelden alleen wanneer over de gehele bol wordt geïntegreerd.

## A.2 Collocatie

In deze paragraaf zal nader worden ingegaan op de collocatiemethode, waarbij spectrale aspecten een belangrijke rol spelen.

De covariantiefuncties spelen een centrale rol in collocatie. We beperken ons hier tot het geval waarbij de covariantiefunctie wordt geschreven als

$$C(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n P_n(\cos \psi) , \quad (\text{A.16})$$

waarin  $c_n$  de signaalgraadvarianties zijn. Omdat de covariantiefunctie weer een sommatie van Legendre polynomen is, kunnen de lineaire of gelineariseerde operatoren tussen de verschillende zwaartekrachtveld-gerelateerde grootheden ook worden toegepast in het spectrum. Als de  $c_n$  zijn gegeven voor zwaartekranchtanomalieën, dan geldt (zie bijvoorbeeld Moritz, 1980a; Rummel, 1990)

$$C^{gg}(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n P_n(\cos \psi) . \quad (\text{A.17})$$

De signaal-covariantievoortplanting naar andere covariantiefuncties wordt dan door gebruik te maken van de reeksontwikkeling voor  $St(\psi)$  (2.4) en de orthogonaliteitsrelaties (A.3)

$$\begin{aligned} C^{Ng}(\psi) &= \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} St(\psi) C^{gg}(\psi) d\sigma = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n c_n P_n(\cos \psi) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{\gamma(n-1)} c_n P_n(\cos \psi) , \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} C^{NN}(\psi) &= \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} St(\psi) C^{Ng}(\psi) d\sigma = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n^2 c_n P_n(\cos \psi) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R}{\gamma(n-1)} \right)^2 c_n P_n(\cos \psi) . \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

De signaal-covariantievoortplanting kan eenvoudig worden uitgevoerd in het spectrale domein.

De berekening van een covariantiefunctie voor een algemene functie op de bol die kan worden geschreven als (A.1) gebeurt met (Moritz, 1980a, p.82)

$$\begin{aligned} C(\psi) &= M \{f(P) f(Q)\} \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{\sigma} \int_{\alpha=0}^{2\pi} f(P) f(Q) d\alpha d\sigma_Q \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_{nm}^2 \bar{Y}_{nm}(P) \bar{Y}_{nm}(Q) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} c_n P_n(\cos \psi_{PQ}) ,$$

waar dus

$$c_n = \sum_{m=-n}^n f_{nm}^2 = \lambda_n^2 \sum_{m=-n}^n \overline{\Delta C}_{nm}^2 . \quad (\text{A.21})$$

Het graadvariantiespectrum ( $c_n$ ) is vergelijkbaar met het powerspectrum bij Fourieranalyse. Als de covariantiefunctie  $C(\psi)$  gegeven is, dan kunnen de graadvarianties  $c_n$  worden bepaald met (Heiskanen&Moritz, 1967, p.257)

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{\psi=0^\circ}^{180^\circ} C(\psi) P_n(\cos \psi) \sin \psi d\psi . \quad (\text{A.22})$$

Er zijn enkele modellen beschikbaar die de graadvarianties  $c_n$  van de zwaartekrachtanomalieën op aarde beschrijven. Ze zijn in principe berekend met de hierboven gegeven formule (A.22), hetgeen niet zo eenvoudig is in de praktijk (zie ook Wenzel&Arabelos, 1981). Het meest bekende en meest toegepaste covariantiemodel is dat van Tschering&Rapp (1974),

$$c_n = s^{n+2} \frac{A(n-1)}{(n-2)(n+B)} \text{ voor } n > 2, \text{ en } c_2 = 7.5 \text{ mgal}^2 , \quad (\text{A.23})$$

met  $s = 0.999617$ ,  $A = 425.28 \text{ mgal}^2$  en  $B = 24$ .

Na de introductie van de covariantiefunctie en de covariantiefunctievoortplanting, zal nu de collocatiemethode worden beschouwd vanuit een ander perspectief. De collocatieformule kan worden afgeleid met behulp van functionaalanalyse. Krarup (1969) definieert daarvoor een Hilbertruimte op en buiten het aardoppervlak met een reproducerende kernfunctie

$$K(P, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n P_n(\cos \psi_{PQ}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{k_n}{2n+1} \overline{Y}_{nm}(P) \overline{Y}_{nm}(Q) , \quad (\text{A.24})$$

waardoor het inwendig product in deze functieruimte wordt beschreven als

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \int_{\sigma'} f(Q) g(Q') \overline{K}(Q, Q') d\sigma' d\sigma , \quad (\text{A.25})$$

met

$$\overline{K}(Q, Q') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{2n+1}{k_n} \overline{Y}_{nm}(Q) \overline{Y}_{nm}(Q') . \quad (\text{A.26})$$

De eigenschap van de reproducerende kernfunctie houdt in dat

$$f(P) = \langle f(Q), K(P, Q) \rangle . \quad (\text{A.27})$$

Als men nu uit gegeven lineaire functionalen van de stoorpotential  $T$  (dus meetbare grootheden) de schatting van  $\hat{T}$  wil bepalen met de kleinste norm, waarin de norm

wordt berekend volgens  $\langle T, T \rangle^{1/2}$  met (A.25), dan blijkt dat de kleinste-kwadraten collocatieoplossing te zijn.

Er zijn twee dingen van belang die moeten worden opgemerkt. Ten eerste, dat de keuze van de normdefinitie laat zien dat in de gebruikte Hilbertruimte de metriek van die ruimte wordt beschreven door  $\bar{K}(P, Q)$ . En ten tweede: er kan een set orthogonale basisfuncties worden gecreëerd door

$$\varphi_i(P) = L_i^Q K(P, Q) \quad (\text{A.28})$$

waarbij  $L^Q$  een lineaire operator is van de gemeten lineaire functionalen naar de stoorpotentiaal  $T$ , zodat voor  $\hat{T}$  kan worden geschreven

$$\hat{T}(P) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(P). \quad (\text{A.29})$$

In de gekozen Hilbertruimte met de reproducerende kern (A.24), wordt dit dan

$$\hat{T}(P) = \sum_{i=1}^n \alpha_i L_i^Q K(P, Q). \quad (\text{A.30})$$

Deze basisfuncties spannen een subruimte van de totale Hilbertruimte op, en omdat  $\hat{T}$  een lineaire combinatie van de basisfuncties is, is het ook een element van deze subruimte. Moritz (1980a) laat zien dat alle mogelijke oplossingen voor  $T$  die precies door alle gegeven metingen gaan een hypervlak vormen in de Hilbertruimte, en dat de subruimte waarvan  $\hat{T}$  een element is orthogonaal is met dit hypervlak. Deze orthogonaliteit kan men aantonen door de eigenschap van de reproducerende kernfunctie (A.27). Met de basisfuncties (A.28) wordt daardoor de minimum-normoplossing verkregen, waarbij de norm is gedefinieerd volgens (A.25). Deze minimum-normoplossing is de collocatieoplossing als voor de basisfuncties  $L_i^Q K(P, Q)$  de kruiscovariantiefuncties tussen de stoorpotentiaal  $T$  en de gegeven metingen  $l_i$  worden genomen en de functie  $K(P, Q)$  de autocovariantiefunctie van de stoorpotentiaal is. Voor een uitgebreide afleiding en beschrijving hiervan wordt verwezen naar (Krarup, 1969) en (Moritz, 1980a).

Wat is de praktische of fysische betekenis van het voorgaande? Het betekent dat als de kleinste-kwadraten collocatieformule wordt gebruikt dat een kleinste-norm oplossing wordt berekend, met de geldende metriek van (A.26). De metriek wordt dus gekenschetst door de getallen  $k_n$ , welke in de kleinste-kwadraten collocatieformule voorkomen in de gebruikte covariantiefunctie. De graadvarianties  $k_n$  hebben een aflopend karakter voor oplopende  $n$  volgens Kaula's regel volgens  $1/n^3$ . De berekening van de norm middels (A.25) en (A.26) kan worden herschreven met behulp van de orthogonaliteitsrelaties (A.3) tot

$$\| T \| = \langle T, T \rangle^{1/2} = \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{k_n} \sum_{m=-n}^n T_{nm}^2 \right)^{1/2}, \quad (\text{A.31})$$

waarin  $T_{nm}$  de spectrale coefficienten van de functie  $T$  zijn volgens bijvoorbeeld (A.2). Omdat de functie  $T$  een eindige energie heeft (omdat alle functies in de gedefinieerde



Hilbertruimte kwadratisch-integreerbare functies zijn, ofwel een eindige norm hebben), betekent het dus dat de spectrale coëfficiënten  $T_{nm}$  die worden geschat met collocatie voor grote waarden van  $n$  heel klein moeten zijn, want  $k_n$  is ook heel klein voor grote  $n$  in (A.31). De bepaalde oplossing  $\hat{T}$  uit collocatie bevat dus relatief weinig hoge frequenties en is dus glad van karakter. Dit is inderdaad wat gewenst is. In principe is elke functie die door alle meetpunten gaat een mogelijke oplossing voor  $T$ . Deze continue oplossing kan tussen de gegeven punten in een wild karakter hebben. Men heeft echter liever een functie die zich glad gedraagt tussen de meetpunten in, en dit wordt gerealiseerd door de signaalgraadvarianties te gebruiken voor de keuze van de metriek van de oplossingsruimte. Collocatie geeft dus een oplossing voor de stoorpotentiaal of de geoïde die glad is, en waarbij de mate van gladheid wordt bepaald door de gebruikte covariantiefunctie.

## B Lopend-gemiddelde-operator

In deze bijlage wordt de lopend-gemiddelde-operator behandeld, omdat deze veelvuldig wordt gebruikt in de literatuur voor de berekening van de discretisatiefout in de geoiden, en voor de berekening van gemiddelde zwaartekrachtwaarden.

Wanneer op een continue gegeven functie op de bol de lopend-gemiddelde-operator wordt toegepast dan wordt aan elk punt de gemiddelde functiewaarde van een omliggend gebied van dat punt toegekend. Als dit omliggende gebied cirkelvormig rondom het punt wordt genomen, en de onderhavige functie zijn de zwaartekrachtanomalieën dan krijgen we

$$\Delta g_{\beta}(P) = \frac{1}{\sigma_i} \int_{\sigma_i} \Delta g(Q) d\sigma_Q = \int_{\sigma} \Delta g(Q) B(\psi) d\sigma_Q \quad (\text{B.1})$$

Hierin geldt voor  $B(\psi)$

$$B(\psi) = \frac{1}{2\pi(1-\cos\psi_i)} \quad 0 < \psi \leq \psi_i \quad (\text{B.2})$$

$$B(\psi) = 0 \quad \psi_i < \psi \leq \pi$$

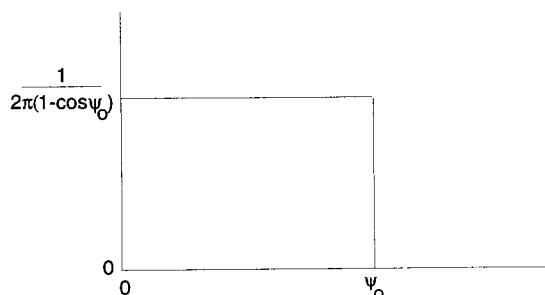
Deze functie is weergegeven in figuur B.1. Omdat de functie homogeen en isotroop is kan worden geschreven

$$B(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n P_n(\cos\psi) . \quad (\text{B.3})$$

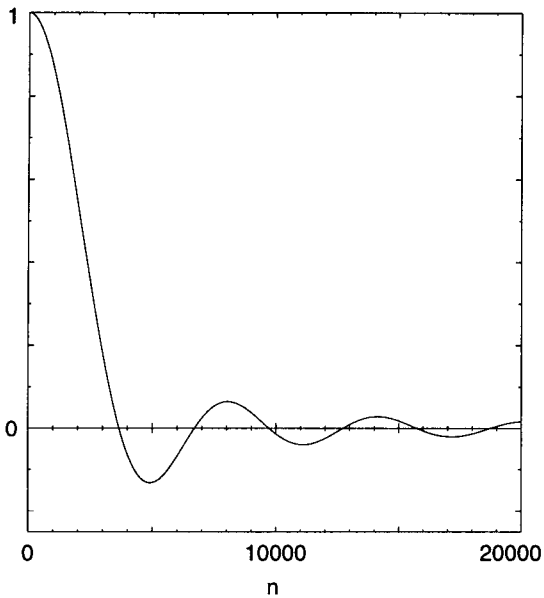
De spectrale coëfficiënten kunnen worden berekend middels (zie ook (A.22))

$$\beta_n = \frac{2n+1}{2} \int_{\psi=0}^{\pi} B(\psi) P_n(\cos\psi) \sin\psi d\psi . \quad (\text{B.4})$$

De  $\beta_n$ -coëfficiënten kunnen worden uitgerekend met een recursief algoritme dat is ontwikkeld door (Sjöberg, 1980).



**Figuur B.1**  $\beta$ -functie voor lopend-gemiddelde.



**Figuur B.2**  $\beta_n$ -coëfficiënten van de lopend-gemiddelde-operator, berekend voor  $\psi_i = 0.06^\circ$ .

Als van de zwaartekrachtfunctie de spectrale coëfficiënten  $\Delta g_n(P)$  zijn gegeven, dan kan de *gesmoothte* versie worden berekend middels

$$\Delta g_\beta(P) = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta g_n(P) \beta_n . \quad (\text{B.5})$$

In figuur B.2 worden de spectrale coëfficiënten  $\beta_n$  weergegeven, zodat kan worden gezien wat er met het spectrum gebeurt door het toepassen van de middelings-operator. De middeling haalt niet alleen het grootste deel (dus niet alles!) van de hoge frequenties weg, maar heeft ook invloed op de lage frequenties.

## C Overhauser-splines

De approximatiemethode Overhauser-splines kan worden gebruikt als de beschikbare functiewaarden in een regelmatig grid zijn gegeven (Klees, 1992). Deze methode heeft als eigenschap dat de functie zelf en de eerste afgeleide ervan continu zijn, ook op de overgang tussen twee naburige elementen. De approximatiefunctie is voor het 1-dimensionele geval een samenstelling van twee parabolen. De ene gaat door de drie punten  $P_1, P_2$  en  $P_3$  met de coordinaten  $u_1 = 0, u_2 = 0.5$  en  $u_3 = 1$ , de tweede door de punten  $P_2, P_3$  en  $P_4$  met de coordinaten  $v_1 = 0, v_2 = 0.5$  en  $v_3 = 1$ . Dit is ook weergegeven in figuur C.1. De gegeven functiewaarden voor de vier punten zijn respectievelijk  $z_1, z_2, z_3$  en  $z_4$ . De twee parabolen worden dan beschreven middels

$$g_1(u) = (1 - 3u + 2u^2) z_1 + (4u - 4u^2) z_2 + (2u^2 - u) z_3, \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (\text{C.1})$$

$$g_2(v) = (1 - 3v + 2v^2) z_2 + (4v - 4v^2) z_3 + (2v^2 - v) z_4, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

De lineaire combinatie van de twee parabolen die een derde orde curve oplevert is

$$g(t) = (1 - t) g_1(u) + t g_2(v), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (\text{C.2})$$

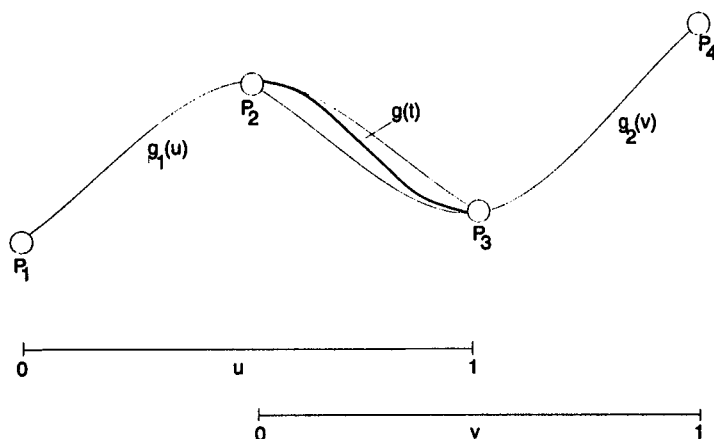
Deze curve is gedefinieerd tussen de punten  $P_2$  en  $P_3$ . Er geldt (zie ook figuur C.1)

$$u = 0.5 (1 + t) \quad (\text{C.3})$$

$$v = 0.5 t.$$

en hieruit volgt dat

$$g(t) = \sum_{i=1}^4 f_i(t) z_i, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (\text{C.4})$$



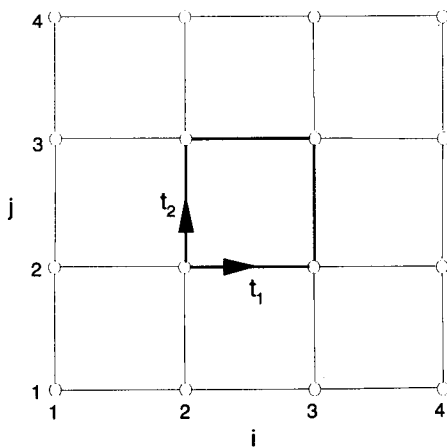
**Figuur C.1** Overhauser-spline: lineair combineren van twee parabolen.

met

$$\begin{aligned}
 f_1(t) &= -0.5 t + t^2 - 0.5 t^3, \\
 f_2(t) &= 1 - 2.5 t^2 + 1.5 t^3, \\
 f_3(t) &= 0.5 t + 2 t^2 - 1.5 t^3, \\
 f_4(t) &= -0.5 t^2 + 0.5 t^3.
 \end{aligned}
 \tag{C.5}$$

Met (C.4) kan tussen de punten  $P_2$  en  $P_3$  de functie worden bepaald. De continuïteit van de eerste afgeleide van de functie wordt veroorzaakt door het gebruik van de twee buurpunten  $P_1$  en  $P_4$ . Men kan eenvoudig aantonen dat de functie en zijn eerste afgeleide ook continu is naar het volgende interval toe, tussen de punten  $P_3$  en  $P_4$  waar de approximatiefunctie wordt bepaald door de gegeven functiewaarden in de punten  $P_2 - P_5$ .

Deze approximatiefunctie kan worden uitgebreid voor meer-dimensionele gevallen. We zijn hier geïnteresseerd in het 2-dimensionele geval. We hebben een regelmatig grid van  $\varphi$ - en  $\lambda$ -coördinaten, waarop voor elk punt de geïdehoogte is gegeven. We gebruiken nu 16 gridpunten die samen 9 blokgebieden vormen. Deze worden weergegeven in figuur C.2. Met behulp van deze 16 punten wordt in het middelste van de 9 blokgebieden de functie berekend. De vergelijking die wordt gebruikt is



**Figuur C.2** De 16 punten die worden gebruikt bij toepassing van Overhauser-splines voor 2-dimensionele situaties.

$$\begin{aligned}
s(t_1, t_2) = & f_1(t_1) ( f_1(t_2) z_{11} + f_2(t_2) z_{12} + f_3(t_2) z_{13} + f_4(t_2) z_{14} ) + \\
& f_2(t_1) ( f_1(t_2) z_{21} + f_2(t_2) z_{22} + f_3(t_2) z_{23} + f_4(t_2) z_{24} ) + \\
& f_3(t_1) ( f_1(t_2) z_{31} + f_2(t_2) z_{32} + f_3(t_2) z_{33} + f_4(t_2) z_{34} ) + \\
& f_4(t_1) ( f_1(t_2) z_{41} + f_2(t_2) z_{42} + f_3(t_2) z_{43} + f_4(t_2) z_{44} ),
\end{aligned} \tag{C.6}$$

met  $0 \leq t_1 \leq 1$  en  $0 \leq t_2 \leq 1$ . De approximatiefunctie is dan

$$s(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 w_{ij}(t_1, t_2) z_{ij}, \tag{C.7}$$

met

$$w_{ij}(t_1, t_2) = f_i(t_1) f_j(t_2). \tag{C.8}$$

Door deze Overhauser-splines te gebruiken in combinatie met het berekende 3'x5' geoidengrid kunnen we voor ieder punt in Nederland de geoidhoogte uitrekenen en ook de schietloodafwijkingen. Bij overgang van een gridgebied naar een buurgridgebied zal de geoid mooi glad verlopen, in tegenstelling tot bijvoorbeeld het geval waarbij (bi)lineaire interpolatie wordt gebruikt. De schietloodafwijkingen zullen op deze overgangen ook een continue functie opleveren.